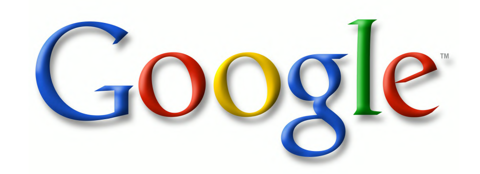
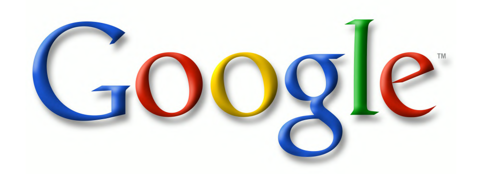






Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Siebenzehnter Band.

In vier Heften.

Mit drei Kupfertafeln.

Berlin, 1837.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des siebenzehnten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Recherches analytiques sur les expressions du rapport le la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brounker; et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q$.

(Par Mr. *Jean Plana* à Turin.)

La réduction des *Intégrales Euleriennes de première espèce* au plus petit nombre possible de transcendantes, pour une valeur donnée de l'exposant du radical, est le principal but que je me suis proposé en composant ce Mémoire. Après le principe général de cette réduction découvert par *Euler*, la considération spéciale du cas où l'exposant du radical est un nombre *pair* a fait découvrir à *Legendre* une relation nouvelle qui réduisait à la moitié le nombre primitif des transcendantes auxiliaires. En variant la manière dont on peut démontrer cet important résultat de *Legendre*, j'ai remarqué une combinaison propre à lui donner plus d'extension; et de là j'ai tiré une formule générale de réduction pour tout exposant du radical qui n'est pas un nombre premier. C'est autour de ce point qu'on verra converger presque toutes les recherches que j'ai réunies dans cet écrit.

Le premier chapitre constitue une espèce d'introduction au second, où j'ai voulu présenter sous un même point de vue la solution de plusieurs questions qui ont une connexion plus ou moins intime avec l'intégrale définie $\int_0^1 dx(1-x^2)^q$. En réflechissant, que j'avais étudié cette intégrale, principalement dans les rapports qu'elle a avec le nombre π qui exprime la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, j'ai pensé, que je me conformais mieux à l'esprit de mon analyse, en définissant la première partie de ce Mémoire, comme un ensemble de recherches relatives aux expressions de la transcendante π trouvées par *Wallis* et *Brounker*.

Au reste, ce long Mémoire a, comme tant d'autres de ce genre, l'inconvénient qu'on ne saurait en donner un extrait suffisamment complet sans entrer dans des détails incompatibles avec l'idée d'un simple extrait. Une lecture faite à la hâte remplira mieux l'objet de ceux qui voudraient seulement acquérir une connaissance superficielle des questions qui y sont traitées.

J'ai eu soin de citer dans le cours de ces recherches les auteurs des principaux résultats déjà connues: et si, sur ce point, il y a des omissions, je prie le lecteur de croire qu'elles sont involontaires de ma part; il faudra les attribuer au défaut de mes connaissances à l'égard de tous les ouvrages publiés jusqu'à ce jour sur cette matière.

Turin le 16. Avril 1836.

Chapitre premier.

Théorie de l'intégrale définie $\int_0^1 dx(1-x^2)^q$.

§. 1.

Etudions d'abord l'intégrale définie $\int_0^1 dx(1-x^2)^q$, qui comprend la quadrature des aires considérées par *Wallis*. L'intégration par parties donne

$$\int dx(1-x^2)^q = x(1-x^2)^q + 2q\int x^2dx(1-x^2)^{q-1}.$$

Donc, en supposant q un nombre positif, il viendra

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q = 2q\int_0^1 x^2dx(1-x^2)^{q-1}.$$

Mais $x^2 = 1-(1-x^2)$; partant

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q = -2q\int_0^1 dx(1-x^2)^q + 2q\int_0^1 dx(1-x^2)^{q-1}$$

d'où l'on tire

$$1.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2q}{2q+1}\int_0^1 dx(1-x^2)^{q-1}.$$

Par une application répétée de cette formule on a donc

$$(a.)\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2q}{2q+1}\cdot\frac{2q-2}{2q-1}\cdot\int_0^1 dx(1-x^2)^{q-2}$$

$$= \frac{2q}{2q+1}\cdot\frac{2q-2}{2q-1}\cdot\frac{2q-4}{2q-3}\cdot\int_0^1 dx(1-x^2)^{q-3}$$

$$= \frac{2q}{2q+1}\cdot\frac{2q-2}{2q-1}\cdot\frac{2q-4}{2q-3}\cdots\frac{2q-(2i-2)}{2q-(2i-3)}\cdot\int_0^1 dx(1-x^2)^{q-i}.$$

Maintenant, si nous supposons q un nombre entier, et $i=q$, cette formule donne

$$2.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2.4.6.8\ldots.2q}{3.5.7.9\ldots.2q+1};$$

ou bien

$$3.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = 2^q.\frac{1.2.3.4\ldots.\ q}{3.5.7.9\ldots.2q+1};$$

$$4.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2^q}{2q+1}.\frac{1.2.3.4\ldots.\ q}{1.3.5.7\ldots.2q-1};$$

$$5.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2^q(1.2.3.4\ldots.q)(2.4.6\ldots.2q)}{1.2.3.4.5\ldots.2q+1};$$

$$6.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2^{2q}(1.2.3.4\ldots.\ q)^2}{1.2.3.4\ldots.2q+1};$$

$$7.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2^{2q}}{2q+1}.\frac{(1.2.3.4\ldots.\ q)^2}{1.2.3.4\ldots.2q}.$$

D'après cette dernière forme il est manifeste, que le coefficient de x^q qui entre dans le développement du binome $(1+x)^{2q}$ peut être exprimé par

$$8.\quad \frac{2^{2q}}{(2q+1)\int_0^1 dx(1-x^2)^q} = \frac{1.2.3.4\ldots.2q}{(1.2.3.4\ldots.\ q)^2}.$$

C'est à l'aide de la formule (2.) qu'on peut sommer, par la première puissance d'une intégrale définie, la série qui donne le carré d'un arc de cercle par les puissances paires de son *sinus*. En effet; soit φ l'arc et u son *sinus;* on a

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = u + \frac{1}{2}.\frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{u^5}{5} + \text{etc.}$$

En faisant le carré de cette suite on aurait un résultat de la forme

$$\varphi^2 = B_1 u^2 + B_2.\frac{u^4}{2} + B_3.\frac{u^6}{3}\ldots. + B_i.\frac{u^{2i}}{i} + \text{etc.}$$

où il est évident, que $B_1 = 1$.

Pour déterminer la loi de ces coefficiens, il faut observer que, par une double différentiation de l'équation

$$\varphi^2 = \left(\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)^2$$

on obtient

$$\frac{d^2.\varphi^2}{du^2}(1-u^2) - u\frac{d.\varphi^2}{du} = 2.$$

Donc en substituant ici l'expression de φ^2 en série, on trouvera que, pour toute valeur de i plus grande que l'unité, on doit avoir l'équation

$$u^{2i-2}[2(2i-1)B_i - 2(2i-2)B_{i-1}] = 0,$$

laquelle donne

$$B_i = \frac{2i-2}{2i-1}.B_{i-1}.$$

Or il est clair qu'on satisfait à cette équation en prenant

$$B_i = \int_0^1 dx(1-x^2)^{-1};$$

on y satisferait aussi en prenant cette intégrale multipliée par une constante arbitraire; mais il suffit de faire $i=1$, pour en conclure que cette constante doit être égale à l'unité.

Ainsi, nous avons

$$\varphi^2 = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[u^2(1-x^2)+\frac{u^4}{2}(1-x^2)^2+\frac{u^6}{2}(1-x^2)^3+\text{etc.}\right];$$

et en sommant la suite infinie

$$\varphi^2 = -\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\log[1-u^2(1-x^2)].$$

Si l'on fait $x=\cos\theta$, cette expression sera équivalente à celle-ci:

$$\varphi^2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta}\log(1-\sin^2\varphi.\sin^2\theta).$$

Il suit de là, qu'en posant

$$\varphi = A_0\sin\varphi + A_1\frac{\sin^3\varphi}{3} + A_2\frac{\sin^5\varphi}{5}\ldots + A_i\frac{\sin^{2i+1}\varphi}{2i+1} + \text{etc.};$$

$$\varphi^2 = B_1\sin^2\varphi + B_2\frac{\sin^4\varphi}{2} + B_3\frac{\sin^6\varphi}{3}\ldots + B_i\frac{\sin^{2i}\varphi}{i} + \text{etc.};$$

on a:

$$A_i = \frac{1.3.5.7\ldots.2i-1}{2.4.6.8\ldots.2i}; \qquad B_i = \frac{1}{(2i-1)A_{i-1}} = \frac{1}{2iA_i}.$$

Mr. *De Stainville,* dans ses Mélanges d'analyse avait déjà remarqué la relation fort simple qui lie ces deux coefficiens. Je vais maintenant faire voir comment on peut déterminer, d'une manière analogue la loi des coefficiens qui entrent dans le développement des puissances supérieures φ^3, φ^4, φ^5 etc.

L'équation

$$\varphi^m = \left(\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)^m$$

donne, par une double différentiation,

$$(a'.) \qquad \frac{d^2.\varphi^m}{du^2}(1-u^2) - u\frac{d.\varphi^m}{du} = m(m-1)\left(\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)^{m-2}$$

Donc en posant

$$\varphi^3 = 6\left[C_1\frac{u^3}{3} + C_2\frac{u^5}{5} + C_3\frac{u^7}{7}\ldots + C_i\frac{u^{2i+1}}{2i+1} + \text{etc.}\right],$$

ou aura entre les coefficiens C_i et A_i l'équation

$$2iC_i-(2i-1)C_{i-1}=\frac{A_{i-1}}{2i-1}=\frac{2iA_i}{(2i-1)^2}.$$

Or il est clair, qu'en prenant $C_i=A_iH_i$ on a

$$H_i=H_{i-1}+\frac{1}{(2i-1)^2};$$

ce qui donne

$$H_i=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\ldots+\frac{1}{(2i-1)^2};$$

et par conséquent

$$C_i=A_i\sum_1^i\frac{1}{(2i-1)^2}.$$

En posant

$$\Phi^4=12\left[D_1\frac{u^4}{2}+D_2\frac{u^6}{3}+D_3\frac{u^8}{4}\ldots+D_i\frac{u^{2i}}{i}+\text{etc.}\right],$$

ou aura entre les coefficiens D_i et B_i l'équation

$$2(2i-1)D_i-2(2i-2)D_{i-1}=\frac{B_{i-1}}{i-1}=\frac{1}{(i-1)(2i-2)A_{i-1}};$$

laquelle donne

$$D_i=\frac{2i-2}{2i-1}D_{i-1}+\frac{1}{(2i-2)^2\,2iA_i};$$

partant, si l'on fait $D_i=\frac{H_i}{2iA_i}$, on aura

$$H_i=H_{i-1}+\frac{1}{(2i-2)^2};$$

et par conséquent

$$H_i=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots+\frac{1}{(i-1)^2}\right).$$

Il suit de là, que

$$D_i=\frac{1}{8iA_i}\sum_2^i\frac{1}{(i-1)^2}=\frac{1}{2iA_i}\sum_2^i\frac{1}{(2i-2)^2}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\Phi^5=20\left[E_1\frac{u^5}{5}+E_2\frac{u^7}{7}+E_3\frac{u^9}{9}\ldots+E_i\frac{u^{2i+1}}{2i+1}+\text{etc.}\right],$$

on aura entre les coefficiens E_i et C_i l'équation

$$2iE_i-(2i-1)E_{i-1}=\frac{6.C_{i-1}}{2i-1}=\frac{6.2iA_i}{(2i-1)^2}\sum_2^i\frac{1}{(2i-3)^2}$$

laquelle, en y faisant $E_i=6A_iH_i$, donne

$$H_i=H_{i-1}+\frac{1}{(2i-1)^2}\sum_2^i\frac{1}{(2i-3)^2}.$$

Ainsi nous avons

$$H_i = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) \cdots\cdots + \frac{1}{(2i-1)^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \cdots\cdots + \frac{1}{(2i-3)^2}\right);$$

et par conséquent

$$E_i = 6A_i \sum_2^i \frac{1}{(2i-1)^2} \sum_2^i \frac{1}{(2i-3)^2}.$$

Pour obtenir le développement de φ^6, on fera

$$\varphi^6 = 30\left[F_1 \frac{u^6}{3} + F_2 \frac{u^8}{4} + F_3 \frac{u^{10}}{5} \cdots\cdots + F_i \frac{u^{2i}}{i} + \text{etc.}\right],$$

ce qui donnera entre les coefficiens F_i et D_i l'équation

$$2(2i-1)F_i - 2(2i-2)F_{i-1} = 12\,\frac{D_{i-1}}{i-1},$$

de laquelle on tire

$$F_i = \frac{2i-2}{2i-1} F_{i-1} + \frac{3}{4(i-1)^2\, 2iA_i} \sum_2^i \frac{1}{(i-2)^2}.$$

Maintenant, si l'on fait $F_i = \frac{3H_i}{8iA_i}$ on obtiendra

$$H_i = H_{i-1} + \frac{1}{(i-1)^2} \sum_2^i \frac{1}{(i-2)^2};$$

et par conséquent

$$H_i = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) \cdots\cdots + \frac{1}{(i-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots\cdots + \frac{1}{(i-2)^2}\right);$$

$$F_i = \frac{3}{8iA_i} \sum_2^i \frac{1}{(i-1)^2} \sum_2^i \frac{1}{(i-2)^2};$$

ou bien

$$F_i = \frac{12}{2iA_i} \sum_2^i \frac{1}{(2i-2)^2} \sum_2^i \frac{1}{(2i-4)^2}.$$

En posant

$$\varphi^7 = 42\left[G_1 \frac{u^7}{7} + G_2 \frac{u^9}{9} + G_3 \frac{u^{11}}{11} \cdots\cdots + G_i \frac{u^{2i+1}}{2i+1} + \text{etc.}\right],$$

$$\varphi^8 = 56\left[H_1 \frac{u^8}{4} + H_2 \frac{u^{10}}{5} + H_3 \frac{u^{12}}{6} \cdots\cdots + H_i \frac{u^{2i}}{i} + \text{etc.}\right];$$

on trouvera de la même manière:

$$G_i = 20.6.A_i \sum_3^i \frac{1}{(2i-1)^2} \sum_3^i \frac{1}{(2i-3)^2} \sum_3^i \frac{1}{(2i-5)^2};$$

$$H_i = \frac{30.12}{2iA_i} \sum_4^i \frac{1}{(2i-2)^2} \sum_4^i \frac{1}{(2i-4)^2} \sum_4^i \frac{1}{(2i-6)^2}.$$

Ainsi, il est démontré qu'on peut exprimer les coefficiens du développement de Φ^m, suivant les puissances de $\sin\Phi$, par des sommations multiples conformes à celles qui sont ici indiquées par le signe Σ.

Ces mêmes séries ont été considérées par Mr. *Scholtz* dans un Mémoire qu'il a publié dans le 3ième volume du Journal de Mr. *Crelle* (voyez page 70): mais la marche que je viens d'exposer me semble offrir sous une forme plus explicite la loi de ces coefficiens. Au reste, ces séries, ordonnées suivant les puissances du *sinus* de l'arc, présentent un contraste assez frappant, lorsqu'on les rapproche des séries de *Daniel Bernoulli*, où les puissances de l'arc sont exprimées par des suites de *sinus* ou de *cosinus* des arcs multiples, toutes dérivées par des intégrations successives de la série élémentaire

$$\tfrac{1}{2} = \cos\Phi - \cos 2\Phi + \cos 3\Phi - \cos 4\Phi + \text{etc.}$$

§. 2.

Le premier membre de l'équation (6.) peut être considéré comme une fonction continue de l'exposant q. Donc, en désignant cette fonction par $F(q)$, il sera permis de regarder le second membre de la même équation comme capable de donner les valeurs de $F(q)$ correspondantes aux valeurs entières et positives de q. Mais ce second membre cesse d'avoir une signification dès qu'on donne à q des valeurs fractionnaires. L'analyse offre un moyen remarquable pour détruire une telle limitation. En effet; rappelons nous, que parmi les intégrales définies il existe la formule

$$9.\quad \int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^m = \int_0^\infty dx.e^{-x}.x^m = 1.2.3.4\ldots.m = \Phi(m).$$

Donc en appliquant cette manière de voir le produit des nombres naturels, au second membre de l'équation (6.) nous aurons,

$$10.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{2^{2q}\left[\int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^q\right]^2}{\int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2q+1}}.$$

Or il est facile de se convaincre, que cette équation subsiste quelle que soit la valeur positive de q; fractionnaire, irrationnelle ou transcendante: car, on ne peut avoir

$$11.\quad F(q) = \frac{2^{2q}[\varphi(q)]^2}{\varphi(2q+1)},$$

pour toute valeur entière et positive de q, sans que cette équation soit

réductible à une identité; ce qui fait disparaître, d'un coup, la limitation qu'on avait d'abord introduite dans l'exposant q.

Cela posé, il est clair, que l'équation (10.) fournira la valeur d'une des trois intégrales définies qu'elle renferme, lorsque deux seront connues. Par exemple; faisons $q=\frac{1}{2}$; alors on a

$$\int_0^1 dx\sqrt{(1-x^2)}=\frac{\pi}{4};\quad \int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^2=2;$$

et par conséquent

$$12.\quad \int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\int_0^\infty dx.e^{-x}.\sqrt{x}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

En faisant $q=-\frac{1}{2}$, on aurait

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2};\quad \int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2q+1}=1;$$

et la même équation (10.) donnera

$$13.\quad \int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\int_0^\infty\frac{dx.e^{-x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\pi}.$$

On voit par là, comment, en prenant les nombres entiers pour auxiliaires, on peut arriver à des résultats qui subsistent pour des nombres quelconques. Le développement d'un binome a offert le premier exemple frappant d'une extension de ce genre. Toutefois il ne faut oublier, que, dans le cas actuel l'exposant q ne peut être négatif sans être inférieur à l'unité.

§. 3.

La formule (4.) a été trouvée par *Wallis* à une epoque où il ignorait la loi du développement d'un binome pour un exposant quelconque: et comme elle n'est explicitement applicable qu'au cas de q nombre entier et positif, *Wallis* chercha un artifice propre à la plier au cas où q serait un nombre fractionnaire. Sans reproduire les idées de *Wallis*, qui attestent l'état d'enfance de l'analyse mathématique, voici comment, par des moyens tout-à-fait élémentaires, on peut opére cette ingénieuse transformation.

Remarquons d'abord, que

$$\begin{aligned}1.3.5.7\ldots.2q-1 &= 2(\tfrac{1}{2}).2(\tfrac{1}{2}+1).2(\tfrac{1}{2}+2)\ldots\ldots\ldots 2(\tfrac{1}{2}+q-1)\\ &= 2^q[(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)(\tfrac{1}{2}+2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\tfrac{1}{2}+q-1)]\\ &= 2^q[(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)(\tfrac{1}{2}+2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(q-\tfrac{1}{2})],\\ &= 2^q[(q-\tfrac{1}{2})(q-\tfrac{1}{2}-1)(q-\tfrac{1}{2}-2)\ldots.(q-\tfrac{1}{2}-q+1)];\end{aligned}$$

de sorte que la formule (4.) revient à celle-ci,

$$14. \quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{1}{2q+1}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots.q}{(q-\frac{1}{2})(q-\frac{1}{2}-1)(q-\frac{1}{2}-2)\ldots.(q-\frac{1}{2}-q+1)};$$

où le nombre des facteurs est le même au numérateur et au dénominateur. Or, en général, toute fraction de la forme

$$15. \quad M = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots.(a-n+1)}{(b+1)(b+2)(b+3)\ldots.(b+n)},$$

composée d'un même nombre *fini*, n, de facteurs, au numérateur et au dénominateur, est susceptible d'être transformée dans une autre fraction, où le nombre des facteurs au numérateur et au dénominateur est infini. En effet, multiplions cette fraction par

$$1 = \frac{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k).(b+n+1)(b+n+2)\ldots.(b+n+k)}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k).(b+n+1)(b+n+2)\ldots.(b+n+k)},$$

le produit donnera

$$M = \frac{(a+k)(a+k-1)(a+k-2)\ldots.(a-n+1).(b+n+1)(b+n+2)\ldots.(b+n+k)}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k).(b+1)(b+2)(b+3)\ldots.(b+n+k)}.$$

Actuellement, on peut regarder le numérateur de cette fraction, comme composé des trois facteurs

$$N' = (a+k)\quad(a+k-1)(a+k-2)\ldots.(a+k-n+1),$$
$$N'' = (a-n+1)(a-n+2)(a-n+3)\ldots.(a-n+k),$$
$$N''' = (b+n+1)(b+n+2)(b+n+3)\ldots.(b+n+k);$$

et le dénominateur comme composé de ces trois facteurs correspondans; savoir

$$D' = (b+k+1)(b+k+2)\ldots.(b+k+n),$$
$$D'' = (a+1)(a+2)\ldots\ldots\ldots.(a+k),$$
$$D''' = (b+1)(b+2)\ldots\ldots\ldots.(b+k).$$

Alors, l'expression précédente de M peut être écrite ainsi:

$$M = \frac{N'}{D'}\cdot\frac{N''}{D''}\cdot\frac{N'''}{D'''}.$$

Cela posé; si l'on suppose *finies* les trois quantités a, b, n et le nombre k infiniment grand, le facteur $\frac{N'}{D'}$ deviendra égal à l'unité: effectivement

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots.\left(1-\frac{(n-1)}{k}\right).\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k-1}\right)\ldots.\left(1+\frac{a}{k-n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\ldots.\left(1+\frac{n}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{k+1}\right)\left(1+\frac{b}{k+2}\right)\ldots.\left(1+\frac{b}{k+n}\right)},$$

et par conséquent $\frac{N'}{D'} = 1$, lorsque $k = \infty$. Donc nous avons

$$M = \frac{N''}{D''} \cdot \frac{N'''}{D'''},$$

ou bien,

$$16. \quad M = \begin{cases} \dfrac{(a-n+1)(a-n+2)(a-n+3)(a-n+4)\dots}{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)\dots} \\ \times \dfrac{(b+n+1)(b+n+2)(b+n+3)(b+n+4)\dots}{(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)\dots}, \end{cases}$$

$$17. \quad \frac{1}{M} = \begin{cases} \left(\dfrac{a+1}{a-n+1}\right)\left(\dfrac{a+2}{a-n+2}\right)\left(\dfrac{a+3}{a-n+3}\right)\dots \\ \times \left(\dfrac{b+1}{b+n+1}\right)\left(\dfrac{b+2}{b+n+2}\right)\left(\dfrac{b+3}{b+n+3}\right)\dots \end{cases}$$

Maintenant, si l'on fait dans cette dernière formule, $b=0$, $n=q$, $a=q-\frac{1}{2}$, l'équation (14.) deviendra

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{1}{2q+1}\left(\frac{q-\frac{1}{2}+1}{q-\frac{1}{2}-q+1}\right)\left(\frac{q-\frac{1}{2}+2}{q-\frac{1}{2}-q+2}\right)\dots \times \left(\frac{1}{q+1}\right)\left(\frac{2}{q+2}\right)\dots,$$

ou bien

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{1}{2q+1}\left(\frac{2q+1}{1}\right)\left(\frac{2q+3}{3}\right)\left(\frac{2q+5}{5}\right)\dots \times \left(\frac{1}{q+1}\right)\left(\frac{2}{q+2}\right)\left(\frac{3}{q+3}\right)\dots,$$

ce qui revient à dire, que

$$18. \quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{1}{2q+1}\left(\frac{2q+1}{q+1}\right)\left(\frac{4q+2.3}{3q+2.3}\right)\left(\frac{6q+3.5}{5q+3.5}\right)\dots \times \left(\frac{8q+4.7}{7q+4.7}\right)\left(\frac{10q+5.9}{9q+5.9}\right)\dots$$

Telle est, suivant le langage de l'analyse moderne, la transformation de l'équation (4.) qui comprend le cas particulier considéré par *Wallis*. En prenant pour q un nombre entier, cette formule présentera, sous forme infinie, le résultat fini qu'on déduit immédiatement de la formule (2.). Par exemple, en faisant $q=2$, on obtient

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{27}{25} \cdot \frac{44}{42} \cdot \frac{65}{63} \cdot \frac{90}{88} \cdot \frac{119}{117} \text{ etc.},$$

ce qui est vrai à l'infini.

Ainsi, la formule (18.) fournit une approximation au lieu du résultat fini; mais elle a l'avantage de donner aussi une approximation pour les cas, où la formule (2.) cesse d'être applicable. Par exemple; soit $q=\frac{1}{2}$: alors on a

$$\int_0^1 dx\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2};$$

et la formule (18.) donne

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{2+2.3}{3.\frac{5}{2}}\right)\left(\frac{3+3.5}{5.\frac{7}{2}}\right)\left(\frac{4+4.7}{7.\frac{9}{2}}\right)\ldots,$$

$$= \left(\frac{2.2}{3}\right)\left(\frac{2.2.4}{3.5}\right)\left(\frac{2.3.6}{5.7}\right)\left(\frac{2.4.8}{7.9}\right)\ldots.$$

$$= \left(\frac{2^2}{3}\right)\left(\frac{4^2}{3.5}\right)\left(\frac{6^2}{5.7}\right)\left(\frac{8^2}{7.9}\right)\left(\frac{10^2}{9.11}\right)\ldots.$$

$$= \left(\frac{2^2}{1^2}\right)\left(\frac{4^2}{3^2}\right)\left(\frac{6^2}{5^2}\right)\left(\frac{8^2}{7^2}\right)\left(\frac{10^2}{9^2}\right)\frac{1}{11}\ldots.$$

De sorte qu'en poussant l'approximation jusqu'à la fraction $\frac{1}{2i+1}$, on aura

$$19. \quad \frac{\pi}{2} = \left[\frac{2.4.6.8.10\ldots.2i}{1.3.5.7.\,9\ldots.2i-1}\right]^2 \frac{1}{2i+1};$$

ou bien

$$20. \quad \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{11}.\frac{12}{13}\ldots.$$

$$= \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\ldots.$$

Telle est l'expression de $\frac{\pi}{4}$ trouvée par *Wallis*. Si elle n'offre pas l'avantage d'une approximation rapide pour ce nombre même, elle présente un moyen assez facile pour calculer son logarithme. Car, en prenant le logarithme des deux membres de cette équation, et développant ensuite le logarithme de chaque binome par la série

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \text{etc.},$$

on obtiendra, en posant pour abréger

$$S_{2i} = \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{5^{2i}} + \frac{1}{7^{2i}} + \frac{1}{9^{2i}} + \text{etc.};$$

$$\log \text{hyp}^2 \pi = 2 \log \text{hyp}^2 2 - S_2 - \tfrac{1}{2}.S_4 - \tfrac{1}{3}.S_6 - \tfrac{1}{4}.S_8 - \text{etc.}$$

C'est à l'aide de cette suite qu'*Euler* a trouvé dans son *Introductio in Analysin* (page 151 du 1er volume)

$$\log \text{hyp}^2 \pi = 1,14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 342\ldots.$$

$$\log \text{tab}^2 \pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 126\ldots.$$

§. 4.

S'il était question de calculer le nombre $\frac{\pi}{4}$ par des séries rapidement convergentes, on pourrait s'y prendre ainsi qu'il suit. Soit ϕ un arc de cercle tel que $\tan\phi = \frac{1}{20}$: on tire de là $\tan 2\phi = \frac{40}{399}$, $\tan 4\phi = \frac{31920}{157601}$. Actuellement, si l'on prend un autre arc θ, tel que $\tan\theta = \frac{1}{5}$, on aura

$$\tan(4\phi - \theta) = \frac{1999}{819925} = \frac{1}{410,1\ldots}.$$

Donc on a

$$4\varphi - \theta = \frac{1999}{819925} - \frac{1}{3}\left(\frac{1999}{819925}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1999}{819925}\right)^5 - \text{etc.};$$

$$\varphi = \frac{1}{20} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20^5} - \text{etc.};$$

et par conséquent

$$\theta = 4\left[\frac{1}{20} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20^5} - \text{etc.}\right]$$
$$-\left[\frac{1999}{819925} - \frac{1}{3}\left(\frac{1999}{819925}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1999}{819925}\right)^5 - \text{etc.}\right].$$

D'un autre côté, l'équation $\tang\theta = \frac{1}{5}$ donne $\tang 2\theta = \frac{5}{12}$, $\tang 4\theta = \frac{120}{119}$: partant on a $\tang\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$; d'où l'on tire

$$4\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(239)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(239)^5} - \text{etc.};$$

et enfin

$$21.\quad \frac{\pi}{4} = 16\left[\frac{1}{20} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(20)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(20)^5} - \text{etc.}\right]$$
$$-\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(239)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(239)^5} - \text{etc.}\right]$$
$$-4\left[\frac{1999}{819925} - \frac{1}{3}\left(\frac{1999}{819925}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1999}{819925}\right)^5 - \text{etc.}\right].$$

§. 5.

Je reviens maintenant à l'intégrale $\int_0^1 dx(1-x^2)^q$, et j'observe, que, si l'exposant p était égal à $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ etc. ou à tout autre nombre fractionnaire plus grand que l'unité, il ne conviendrait pas de s'en tenir à la formule (18.) il faudrait d'abord, à l'aide de la formule (*a.*) du 1er §., abaisser l'exposant q jusqu'à ce que l'intégrale donnée fut dépendante d'une autre intégrale semblable où l'exposant $q-i$ serait moindre que l'unité; ensuite on appliquerait à cette dernière la formule (18.).

Cela revient à dire, qu'en général on a

$$22.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \left(\frac{2q}{2q+1}\right)\left(\frac{2q-2}{2q-1}\right)\left(\frac{2q-4}{2q-3}\right)\dots\left(\frac{2q-2i+2}{2q-2i+3}\right)$$
$$\times\frac{1}{2q-2i+1}\left(\frac{2(q-i)+1}{q-i+1}\right)\left(\frac{4(q-i)+2.3}{3(q-i)+2.3}\right)$$
$$\times\left(\frac{6(q-i)+3.5}{5(q-i)+3.5}\right)\left(\frac{8(q-i)+4.7}{7(q-i)+4.7}\right)\dots$$

Cette formule offre, conformément aux idées de *Wallis*, une solution approchée du problème qu'il s'était proposé dans son *Arithmetica infini-*

torum; qui était, d'intercaler, par une même formule, les termes intermédiaires dans la suite des nombres 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, etc. qu'on obtient en faisant successivement $q=0$, 1, 2, 3, etc. dans la formule (2.).

§. 6.

Newton, par une voie très-différente, est arrivé au même but. A l'aide d'une singulière induction racontée par lui-même dans une lettre à *Oldenbourg*, datée du 24. Octobre 1676, il a trouvé, que, pour un exposant quelconque q, on avait:

$$23.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = 1-q.\frac{1}{3}+\frac{q(q-1)}{1.2}.\frac{1}{5}-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}.\frac{1}{7}+\text{etc.};$$

ce qui, d'après nos idées, revient à développer d'abord le binome $(1-x^2)^q$, et à exécuter ensuite l'intégration de chaque terme de ce développement. Mais, à une époque où ce développement était ignoré par *Wallis* et par *Newton* lui-même il fallait une sagacité extraordinaire pour franchir ainsi un tel obstacle, et résoudre à la fois le problème de l'intégration définie et de l'intégration indéfinie.

Au reste, si le nombre q était fractionnaire et plus grand que l'unité, il faudrait combiner la formule (a.) avec la formule (23.); ce qui donnerait en posant $q'=q-i$, de manière que q' soit un nombre plus petit que l'unité;

$$24.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \left[\frac{2q}{2q+1}.\frac{2q-2}{2q-1}.\frac{2q-4}{2q-3}\cdots\frac{2q-2i+2}{2q-2i+3}\right]$$
$$\times\left[1-q'.\frac{1}{3}+\frac{q'(q'-1)}{1.2}.\frac{1}{5}-\frac{q'(q'-1)(q'-2)}{1.2.3}.\frac{1}{7}+\text{etc.}\right].$$

Par exemple soit $q=\frac{13}{2}$, on aura $i=6$, $q'=\frac{1}{2}$, et

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^{\frac{13}{2}} = \frac{13.11.9.7.5.3}{14.12.10.8.6.4}\left[1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}-\frac{1.1}{2.4}.\frac{1}{5}-\text{etc.}\right].$$

Il est remarquable que, *Newton*, dans sa lettre citée plus haut, ne dise rien de cette modification exigée par sa méthode, afin d'éviter une série trop peu convergente dans ses premiers termes. Mais il me semble qu'on expliquerait mieux le silence de *Newton* sur ce point, en disant qu'il ne voulait pas détruire la belle régularité de sa série par l'introduction du facteur qui multiplie $1-q'.\frac{1}{3}+\text{etc.}$ Au reste; si c'est là un inconvénient, il est facile de l'éviter d'une autre manière: il suffit de poser, pour un moment, $x^2=1-y^2$: alors, les limites de y correspondantes à

$x=0$, $x=1$, étant $y=1$, $y=0$, on en conclud immédiatement, qu'on a l'équation (en changeant y en x):

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q = \int_0^1 \frac{x^{2q+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

de laquelle on tire, pour le développement du radical:

$$25.\qquad \int_0^1 dx(1-x^2)^q = \frac{1}{2q+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2q+4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2q+6}+\text{etc.}$$

C'est ainsi qu'on peut transformer et augmenter la convergence de la série qui constitue le second membre de l'équation (23.).

§. 7.

Je reprends l'équation (19.), et j'écris ainsi la valeur de $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdots\frac{2i-2}{2i-1}\cdot\frac{2i}{2i-1}\cdot\frac{2i}{2i+1}.$$

En prenant pour i un nombre entier déterminé, le second membre de cette équation cesse (mathématiquement parlant) de représenter la valeur de $\frac{\pi}{4}$. Mais, en ayant sous les yeux les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{dx.x^{2i+1}}{\sqrt{(1-x^2)}},\qquad \int_0^1 \frac{dx.x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

posées dans la page 231 du 1er volume du Calcul Intégral d'*Euler*, on voit aussitôt que, pour toute valeur donnée de i, on a l'équation:

$$\frac{\pi}{4}P = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdots\frac{2i-2}{2i-1}\cdot\frac{2i}{2i-1}\cdot\frac{2i}{2i+1};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$P = \frac{\int_0^1 \frac{dx.x^{2i+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}}{\int_0^1 \frac{dx.x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}}.$$

De là on tire

$$26.\qquad \frac{4}{\pi} = \left[\frac{2i+1}{2i}P\right]\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2i-3}{2i-2}\cdot\frac{2i-1}{2i-2}\cdot\frac{2i-1}{2i}\right].$$

Wallis ignorait la juste expression analytique du facteur $\frac{2i+1}{2i}.P$ qu'on voit dans cette valeur de $\frac{\pi}{4}$. Mais, d'après un théorème qu'on lit dans son *Arithmetica infinitorum* (Voyez p. 468 du 1er vol. de ses ouvrages) on devrait avoir pour un nombre entier i quelconque:

$$\frac{2i+1}{2i}P < \sqrt{\left(1+\frac{1}{2i-1}\right)},\qquad \frac{2i+1}{2i}P > \sqrt{\left(1+\frac{1}{2i}\right)}.$$

Donc, en supposant i un fort grand nombre, il sera permis de développer

les deux radicaux; ce qui donnera

$$\frac{2i+1}{2i}P < 1 + \frac{1}{2(2i-1)} - \frac{1}{8(2i-1)^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{2i+1}{2i}P > 1 + \frac{1}{2.2i} - \frac{1}{8(2i)^2} + \text{etc.}$$

De sorte qu'en ordonnant ces deux inégalités par rapport aux puissances de $\frac{1}{i}$, le théorème de *Wallis* reviendra à dire, que

$$\frac{2i+1}{2i}P < 1 + \frac{1}{4i} + \frac{3}{32.i^2} + \frac{5}{128.i^3} + \frac{35}{2048.i^4} + \text{etc.},$$

$$\frac{2i+1}{2i}P > 1 + \frac{1}{4i} - \frac{1}{32.i^2} + \frac{1}{128.i^3} - \frac{5}{2048.i^4} + \text{etc.}$$

Or ceci est effectivement vrai, comme on va le voir par le développement de la fonction $\frac{2i+1}{2i}.P$.

L'équation (26.) donne

$$\frac{2i+1}{2i}.P = \frac{4i}{\pi}\left[\frac{2.4.6.8.10\ldots.2i-2}{3.5.7.9.11\ldots.2i-1}\right]^2;$$

partant on a

$$\frac{2i+1}{2i}.P = \frac{4i}{\pi}.\frac{[2.4.6.8.10\ldots.2i-2]^4}{[2.3.4.5.\ 6\ldots.2i-1]^2},$$

ou bien

$$\frac{2i+1}{2i}.P = \frac{2^{4i}}{i\pi}.\frac{[1.2.3.4\ldots.\ i]^4}{[1.2.3.4\ldots.2i]^2}.$$

Cette expression rentre dans celle considérée par *Stirling*. Mais, s'il était question d'avoir plusieurs termes de son développement, il conviendrait de recourir à la formule

$$\frac{1.2.3\ldots.2i}{(1.2.3\ldots.i)^2} = \frac{2^{2i}}{\sqrt{(i\pi)}\left[1+\frac{1}{2^4.i^2}-\frac{1}{2^9.3.i^4}+\frac{27}{2^{15}.5.i^6}-\frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7i^8}\right]^{2i}}$$

donnée par *Euler* dans son Cal. diff. (Voyez p. 377 de l'édition de Pavie). En carrant les deux membres de cette équation, et négligeant dans le développement du second membre les termes multipliés par une puissance de $\frac{1}{i}$ supérieure à la quatrième, on aura

$$\frac{(1.2.3.4\ldots.2i)^2}{(1.2.3.4\ldots.i)^4} = \frac{2^{4i}}{i\pi\left[1+\frac{1}{4i}+\frac{1}{32i^2}-\frac{1}{128.i^3}-\frac{5}{2048.i^4}+\text{etc.}\right]},$$

et par conséquent

$$\frac{2i+1}{2i}P = 1 + \frac{1}{4i} + \frac{1}{32.i^2} - \frac{1}{128.i^3} - \frac{5}{2048.i^4} - \text{etc.}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (26.), il viendra

$$27.\quad \frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdot$$
$$\cdots\frac{2i-3}{2i-2}\cdot\frac{2i-1}{2i-2}\cdot\frac{2i-1}{2i}\left[1+\frac{1}{4i}+\frac{1}{32.i^2}-\frac{1}{128.i^3}-\frac{5}{2048.i^4}+\text{etc.}\right].$$

Cette formule offre un moyen simple pour éstimer la partie négligée, lorsqu'on arrête la série des produits de *Wallis* à une fraction correspondante à une valeur fort grande du nombre i. C'est ainsi que je me suis démontré la vérité des limites établies par *Wallis*; mais je dois avouer, que la démonstration qu'il en donne me paraît fort obscure.

En substituant la formule précédente d'*Euler* dans le second membre de l'équation (7.), on aura

$$\int_0^1 dx(1-x^2)^q=\frac{\sqrt{(\pi q)}}{2q+1}\left[1+\frac{1}{2^4.q^2}-\frac{1}{2^9.3q^4}+\frac{27}{2^{13}.5q^6}-\frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7q^8}\right]^{2q};$$

d'où l'on tire, en développant:

$$28.\quad \int_0^1 dx(1-x^2)^q=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{q}\left(1+\frac{1}{2q}\right)}\left[1+\frac{1}{8q}+\frac{1}{128.q^2}-\frac{9}{1024.q^3}+\text{etc.}\right].$$

Cette formule devrait être préférée à celle qui constitue le second membre de l'équation (25.), s'il était question de calculer la valeur de cette intégrale définie pour une valeur fort grande de l'exposant q.

§. 8.

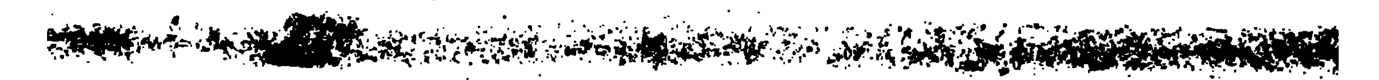
L'expression de $\frac{\pi}{4}$ de *Wallis* présente un contraste assez singulier, lorsqu'on la rapproche de l'expression

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdot\frac{17}{17-1}\cdot\frac{19}{19+1}\cdot\frac{23}{23+1}\ \text{etc.}$$

composée par les *seuls* nombres premiers. *Euler*, à qui elle est due (Voyez p. 242 du 1er volume de sa *Int. in anal.*) démontre sa dérivation de la série $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. Mais cela ne prouve pas, que l'expression de *Wallis* soit aussi une transformation *sui generis* de la même série de *Leibnitz*. Si l'on réflechit, que la factorielle de *Wallis* s'obtient en faisant $x=\frac{\pi}{2}$ dans l'équation

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ \text{etc.};$$

et que cette même équation peut être considérée comme une transformation de la série



$$x = \sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} + \text{etc.},$$

on sera porté à conclure que l'expression de *Wallis* est plutôt une transformation de la série

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \text{etc.}\right].$$

Après cela, si l'on observe que la série $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$ (étant transformée en fraction continue) donne la fraction continue

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}}$$

trouvée par *Brounker*, on pourra bien, *en ce sens* considérer comme identiques les expressions de $\frac{\pi}{4}$ de *Leibnitz* et de *Brounker*; mais non en conclure, ce me semble, l'existence d'une identité analogue entre les expressions de $\frac{\pi}{4}$ trouvées par *Wallis* et *Brounker*. Cependant *Lagrange* a émis une opinion contraire dans son Traité des fractions continues imprimé dans les additions à l'algèbre d'*Euler*. Il dit (lisez p. 381 du second volume) que *Wallis*, dans son *Arithmetica infinitorum* démontre d'une manière assez indirecte quoique fort ingénieuse *l'identité* de son expression avec celle de *Brounker*.

9.

Jean Wallis (né en 1616 et mort en 1703) a publié son expression de $\frac{\pi}{4}$ en 1655. La manière dont il y est parvenu ne pouvait pas avoir une grande influence sur les progrés de l'intégration indéfinie des fonctions; mais, l'idée d'une telle interpolation était originale, et devait par la suite enfanter des découvertes beaucoup plus importantes: à cet égard, elle mérite d'être classée dans le nombre de celles qui honorent l'esprit humain.

C'est un fait digne de remarque que *Wallis* n'a pas su interpréter exactement le premier principe du Calcul intégral, c'est-à-dire la formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{Constante}.$$

Cavalleri avait déjà trouvé que $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$; m étant un nombre entier et positif. *Wallis* a démontré, qu'on avait de même

$$\int_0^1 x^{+\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{\frac{m}{n}+1}.$$

De là, il concluait par induction qu'on devait aussi avoir

$$\int_0^1 x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{-\frac{m}{n}+1};$$

ce qui est vrai pour $\frac{m}{n} < 1$; mais faux pour $\frac{m}{n} > 1$: car alors on a, comme on sait,

$$\int_\infty^1 x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{-\frac{m}{n}+1}; \quad \text{ou bien} \quad \int_1^\infty x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{\frac{m}{n}-1}.$$

Wallis qui rencontrait dans ce cas le nombre négatif $\frac{1}{-\frac{m}{n}+1}$, ne savait en concevoir la signification. Trompé par la figure de la courbe dont l'équation est $y = x^{-\frac{m}{n}}\left(\frac{m}{n} > 1\right)$, et dominé par l'idée fixe que la formule $\frac{1}{-\frac{m}{n}+1}$ devait donner, comme dans le cas de $\frac{m}{n} < 1$, l'espace hyperbolique compris entre zèro et l'unité, *Wallis* poussa l'aberration de son esprit au point de croire que le nombre négatif $\frac{1}{-\frac{m}{n}+1}$ désignait un espace *plus qu'infini*.

Suivant le langage de l'analyse moderne, on verrait aussitôt par l'inspection des deux formules

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x, \quad \int_1^x dx . x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{-\frac{m}{n}+1}\left[\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}-1} - 1\right],$$

que, $\frac{m}{n}$ étant >1 et $x<1$, le second espace est, abstraction faite du signe, d'autant plus grand que le premier que x est une plus petite fraction. Mais, cette comparaison toujours claire entre l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ et l'hyperbole $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, ne saurait entraîner à la conséquence absurde

d'un espace plus qu'infini. Néanmoins, il faut avouer qu'à la naissance des nouveaux calculs il n'était pas aussi facile de démêler la véritable distinction qu'il fallait établir entre les résultats de ce genre.

Toutefois cette erreur de *Wallis* ne fut nullement partagée par *Newton*, comme on peut s'en convaincre par la figure et par les mots „*erit* $x = aBD$ *infinite versus a protensae, quam calculus ponit nega-* „*tivam, propterea quod jacet ex altera parte lineae BD*" qu'on lit à la suite de sa première règle *pro curvarum simplicium quadratura.* Je ne sais pourquoi *Montucla*, après ce passage de *Newton*, a voulu attribuer à *Varignon* la première explication de ce singulier paradoxe (Lisez sa phrase dans la page 350 du second volume de son Histoire des Mathématiques). Après les écrits de *Newton* et de *Varignon* cette question devait paraître tout-à-fait expliquée; néanmoins elle a encore rencontré une résistance assez peu raisonnable de la part du *P. Grandi*, qui, quelques années plus tard (en 1710) a publié à Pise une *Disquisitio geometrica in qua spatia hyperbolica plus quam infinita Wallisii adversus nuperrimos eorundem impugnatores vindicantur.*

§. 10.

Cet exemple prouve, que le principe d'induction peut être illusoire, s'il n'est employé avec une grande circonspection. Et la même intégrale $\int x^m dx$ pourrait donner lieu à une autre méprise analogue à celle de *Wallis*, lorsqu'on la prend entre deux limites égales et de signe contraire. Car, m étant un exposant quelconque positif, on a toujours

$$\int_{-1}^{+1} x^m dx = \frac{2}{m+1};$$

mais si l'exposant de x est négatif, on a aussi

$$\int_{-1}^{+1} x^{-m} dx = \frac{2}{-m+1},$$

pourvu que m soit un nombre entier pair, ou un nombre fractionnaire de la forme $\frac{2p}{2q+1}$. En outre, dans ces mêmes cas, il faut, si $m < 1$, regarder le nombre positif $\frac{2}{-m+1}$, comme l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées correspondantes à $x = -1$ et $x = 1$. Mais, si $m > 1$, il faut regarder le nombre négatif $\frac{2}{-m+1}$, non comme la sommation des élémens $\frac{dx}{x^m}$ depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$; mais simplement, comme la

différence algèbrique des valeurs fourniès par la fonction $\frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, en y faisant $x=1$, et $x=-1$. Si l'on observe ensuite, qu'on a

$$\int_\infty^1 x^{-m}\,dx = \frac{1}{-m+1}; \qquad \int_{-\infty}^{-1} x^{-m}\,dx = \frac{(-1)^{-m+1}}{-m+1},$$

et par conséquent

$$\int_1^\infty x^{-m}\,dx + \int_{-1}^{-\infty} x^{-m}\,dx = \frac{2}{m-1},$$

on pourra interpréter la quantité positive $\frac{2}{m-1}$ comme une véritable sommation des élémens $\frac{dx}{x^m}$ et des élémens $\frac{d(-x)}{(-x)^m}$ faite entre les limites indiquées. Mais ces interprétations purement arithmétiques ne sont pas toujours conformes au véritable esprit du calcul analytique, et on ne doit pas s'y conformer sans un examen détaillé de la question. Ainsi dans un problème de Mécanique, où l'on rencontrerait l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} dx\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)$$

on doit prendre $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$; c'est-à-dire zèro, sans faire attention à la circonstance indirecte, que

$$\int_1^\infty x^{-4}\,dx + \int_{-1}^{-\infty} x^{-4}\,dx = \frac{2}{3}.$$

Par là on serait entraîné à des erreurs d'autant plus dangereuses qu'elles semblent avoir un appui conforme à la vérité dans un sens, tandis qu'il est tout-à-fait faux dans un autre sens. Au reste, il n'entre point dans mon plan, de développer ici les reflexions qu'on peut faire sur ce point spécial du Calcul intégral: on fera mieux de lire celles que Mr. ***Poisson*** a exposées dans le 18. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique (Voyez page 320—341). Cependant je ne puis terminer cette espèce de digression sans ajouter la remarque suivante.

§. 11.

Le partage d'une intégrale définie en deux ou plusieurs parties est fondé sur ce principe. Soit $\psi(x)$ l'intégrale indéfinie de $\int \varphi(x)\,dx$; on aura

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a).$$

Et comme on a identiquement

$$\psi(b) - \psi(a) = [\psi(c) - \psi(a)] + [\psi(b) - \psi(c)],$$

on a établi le principe

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_c^a \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx;$$

c étant une quantité intermédiaire entre les deux limites primitives a et b. Mais sur cela, il faut observer que l'identité précédente exige absolument, que les trois quantités $\psi(a)$, $\psi(c)$, $\psi(b)$ soient déduites de la même fonction de x, et qu'elle cesse, dès que cette condition n'est pas rigoureusement observée. Or, il y a des cas où, par un changement convenable de la constante arbitraire, on a à la fois

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x) + C; \qquad \int \varphi(x)\,dx = F(x) + C'.$$

Alors il serait faux de dire, qu'en prenant

$$\int_c^a \varphi(x)\,dx = \psi(c) - \psi(a); \quad \int_c^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(c),$$

on a encore l'équation

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_c^a \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx.$$

Par exemple, on a

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C'.$$

Chacune de ces deux intégrales indéfinies donne

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{-1}\right) - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1}\right) = -\tfrac{1}{2}\log(-1);$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1}\right) - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\log(-1).$$

Mais si on prend la première pour former l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2}{0}\right) - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1}\right);$$

et la seconde pour former l'intégrale définie

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1}\right) - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2}{0}\right),$$

la somme de ces deux intégrales définies donne

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

ce qui est bien différent de la quantité imaginaire $-\frac{1}{2}\log(-1)$, qu'on obtient directement sans le partage de l'intégration. Ce dernier résultat est une véritable sommation, tandis que la quantité imaginaire est la véritable intégrale définie entre les limites zèro et l'infini.

Chapitre second.

Théorie de l'intégrale $\int_0^1 dx\,x^{p-1}(1-x^n)^q$.

§. 12.

Etudions maintenant d'une manière analogue l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q.$$

L'intégration par parties donne d'abord

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{x^p}{p}(1-x^n)^q + \frac{nq}{p}\int x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{q-1}:$$

donc, en supposant p et q des quantités positives, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{nq}{p}\int_0^1 x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{q-1};$$

mais $x^n = 1-(1-x^n)$; partant on tire de là

$$29.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{nq}{p+nq}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-1}.$$

Par une application répétée de cette formule, on a donc

$$30.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{nq}{p+nq}\cdot\frac{nq-n}{p+nq-n}\cdot\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-2}$$

$$= \frac{nq}{p+nq}\cdot\frac{nq-n}{p+nq-n}\cdots\frac{nq-(i-1)n}{q+nq-(i-1)n}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-i}.$$

Dans le cas où q est un nombre entier et positif, cette formule donne

$$31.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{nq}{p+nq}\cdot\frac{nq-n}{p+nq-n}\cdot\frac{nq-2n}{p+nq-2n}\cdots\frac{n}{p+n}\cdot\frac{1}{p}$$

$$= \frac{n.2n.3n.....nq}{p(p+n)(p+2n)....(p+qn)};$$

ou bien

$$32.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{n^q}{p+qn}\cdot\frac{1.2.3.4....q}{p(p+n)(p+2n)....[p+(q-1)n]}.$$

Si l'on observe maintenant, que

$$p(p+n)(p+2n)(p+3n)....(p+(q-1)n)$$
$$= n^q\left(\frac{p}{n}\right)\left(\frac{p}{n}+1\right)\left(\frac{p}{n}+2\right)....\left(\frac{p}{n}+q-1\right),$$

on mettra l'équation précédente sous la forme

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{1}{p+nq}\cdot\frac{1.2.3....q}{\left(\frac{p}{n}\right)\left(\frac{p}{n}+1\right)\left(\frac{p}{n}+2\right)....\left(\frac{p}{n}+q-1\right)};$$

ou bien en, renversant l'ordre des facteurs et posant pour plus de simplicité $q' = q - \left(1 - \frac{p}{n}\right)$:

$$33. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{1}{p+qn} \cdot \frac{1.2.3\ldots.q}{q'(q'-1)(q'-2)\ldots.(q'-q+1)}.$$

Ce résultat est immédiatement applicable lorsque q est un nombre entier; mais en le transformant d'après la formule (17.), on aura pour une valeur quelconque positive de q:

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{1}{p+nq}\left(\frac{q'+1}{q'-q+1}\right)\left(\frac{q'+2}{q'-q+2}\right)\left(\frac{q'+3}{q'-q+3}\right)\ldots.$$
$$\times \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \text{ etc.}$$

En substituant pour q' sa valeur, il viendra

$$34. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{1}{p+nq} \cdot \frac{nq+p}{p} \cdot \frac{nq+p+n}{p+n} \cdot \frac{nq+p+2n}{p+2n} \ldots.$$
$$\times \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \text{ etc.}$$

ou bien

$$35. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q$$
$$= \frac{1}{p+qn}\left(\frac{nq+p}{p(q+1)}\right)\left(\frac{2n(q+1)+2p}{(q+2)(p+n)}\right)\left(\frac{3n(q+2)+3p}{(q+3)(p+2n)}\right)\left(\frac{4n(q+3)+4p}{(q+4)p+3n)}\right) \text{ etc.};$$

$$36. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q$$
$$= \frac{1}{p+qn}\left(\frac{nq+p}{p(q+1)}\right)\left(\frac{2nq+2(p+n)}{(p+n)(q+2)}\right)\left(\frac{3nq+3(p+2n)}{(p+2n)(q+3)}\right)\left(\frac{4nq+4(p+3n)}{(p+3n)(q+4)}\right) \text{ etc.}$$

Cette dernière formule redonne l'équation (18.) en y faisant $p=1$, $n=2$.

Il est facile d'étendre la remarque faite dans le 1er §., et de faire voir qu'on peut exprimer par des intégrales définies de ce genre un coefficient quelconque du binome $(1+x)^{2q}$. En effet; la formule (32.), par le changement de p en $n(1+i)$ et de q en $2q-i$, donne

$$\int_0^1 x^{n(1+i)-1}dx(1-x^n)^{2q-i} = \frac{1.2.3\ldots.2q-i}{n(2q+1)[(1+i)](2+i)(3+i)\ldots.2q]};$$

partant il est clair qu'on a

$$37. \quad n(2q+1)\int_0^1 x^{n(1+i)-1}dx(1-x^n)^{2q-i} = \frac{1.2.3\ldots.2q-i}{(i+1)(i+2)(i+3)\ldots.2q}.$$

Donc, en multipliant les deux termes de cette expression par $1.2.3\ldots.i$, il viendra

$$38. \quad n(2q+1)\int_0^1 x^{n(1+i)-1}dx(1-x^n)^{2q-i} = \frac{(1.2.3\ldots.i)(1.2.3\ldots.2q-i)}{1.2.3\ldots.2q},$$

où bien

$$39.\quad n(2q+1)\int_0^1 x^{n(1+i)-1}dx(1-x^n)^{2q-i} = \frac{1.2.3\ldots.i}{2q(2q-1)(2q-2)\ldots.(2q-i+1)},$$

c'est-à-dire la valeur renversée du coefficient qui multiplie x^i dans le développement de $(1+x)^{2q}$.

Ce résultat étant vrai sans définir le nombre n; ce qu'il y aurait de plus simple serait de prendre $n=1$; mais ce plus grand degré de généralité peut être utile.

§. 13.

L'équation (38.) est susceptible d'une transformation analogue à celle du cas considéré dans le §. 2. Car, d'après la formule (9.) on a d'abord

$$n\int_0^1 x^{n(1+i)-1}dx(1-x^n)^{2q-i} = \frac{\varphi(i).\varphi(2q-i)}{\varphi(2q+1)};$$

et en faisant $n(1+i)=p'$, $n(2q-i+1)=q''$, on a $i=\frac{p'}{n}-1$; $2q-i=\frac{q''}{n}-1$; $2q+1=\frac{p'+q''}{n}-1$; ce qui change l'équation précédente en celle-ci

$$\int_0^1 x^{p'-1}dx(1-x^n)^{\frac{q''}{n}-1} = \frac{\varphi\left(\frac{p'}{n}-1\right).\left(\frac{q''}{n}-1\right)}{n\varphi\left(\frac{p'+q''}{n}-1\right)}.$$

Or il est clair que cette équation subsiste sans que p' et q'' soient des multiples du nombre n.

En effaçant les accens qui affectent les lettres p', q'' on aura

$$40.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{\varphi\left(\frac{p}{n}-1\right).\varphi\left(\frac{q}{n}-1\right)}{n\varphi\left(\frac{p+q}{n}-1\right)}.$$

Et en changeant q en $nq+n$, cette équation reviendra à dire que,

$$41.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{\varphi\left(\frac{p}{n}-1\right)\varphi(q)}{n\varphi\left(\frac{p}{n}+q\right)}.$$

Cette formule devant s'accorder avec celle désignée par (11.), lorsqu'on y fait $p=1$ et $n=2$, on en tire la conséquence, que

$$\frac{\varphi(-\frac{1}{2}).\varphi(q)}{2\varphi(q+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2q}[\varphi(q)]^2}{\varphi(2q+1)}.$$

D'après l'équation (13.) on a $\Phi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; partant

$$\sqrt{(\pi)}.\Phi(2q+1) = 2^{1+2q}\,\Phi(q).\Phi(q+\tfrac{1}{2}).$$

Si, pour nous conformer à la notation de *Legendre*, nous faisons

$$\Phi(m) = \Gamma(m+1),$$

cette équation sera équivalente à celle-ci:

$$42. \quad \Gamma(q).\Gamma(q+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2q}\sqrt{(\pi)}.\Gamma(2q) = 2^{1-2q}\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(2q);$$

et les équations (40.) et (41.) seront équivalentes à celles-ci:

$$\beta. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)};$$

$$\gamma. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma(q+1)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n}+q+1\right)};$$

Dans le cas particulier de $n=1$, la formule (β.) devient

$$\delta. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette formule est particulièrement applicable, lorsque les exposans p et q sont exprimés par des quantités fraction aires positives.

Les trois équations (β.), (γ.), (δ.) sont fondamentales: on peut affirmer qu'elles renferment toutes les propriétés générales de ces intégrales définies. Mr. *Jacobi* (Voyez le 11me vol. du Journal de Mr. *Crelle* page 307) démontre l'équation (δ.) par la considération des intégrales doubles. Il observe qu'ayant

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x}.x^{p-1}dx,$$

on a aussi

$$\int_0^\infty\int_0^\infty du\,dz.e^{-u-z}.u^{p-1}z^{q-1} = \Gamma(p).\Gamma(q).$$

Ensuite il fait $u+z=y$, $u=yx$; et par conséquent

$$u=yx;\quad z=y(1-x);\quad du=xdy+ydx;\quad dz=dy(1-x)-ydx.$$

Or on sait, que toute intégrale double $\iint V\,du\,dz$ devient, par le changement des deux variables,

$$\iint V\,dx\,dy\left[\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dz}\right)-\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right].$$

Dans le cas actuel $\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)-\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=y$. En outre les deux équations $u=yx$, $z=y(1-x)$ démontrent que les limites de y sont $y=0$, $y=\infty$, et que celles de x sont $x=0$, $x=1$; partant

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\int_0^\infty\int_0^1 y e^{-y}(yx)^{p-1}(q-xy)^{q-1}dy\,dx$$
$$=\int_0^\infty dy.e^{-y}.y^{p+q-1}\int_0^1 dx.x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$
$$=\Gamma(p+q).\int_0^1 dx\,x^{p-1}(1-x)^{q-1};$$

d'où l'on tire

$$\int^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette démonstration de Mr. *Jacobi* est analogue à celle que Mr. *Poisson* avait publiée dans le 19me cahier du Journal de l'Ecole polytechnique (Voyez p. 477). Au reste il me semble qu'il vaut mieux éviter un tel detour dans la démonstration d'une formule fondamentale, qui dérive des notions élémentaires du calcul intégral.

§. 14.

A l'aide de la formule (δ.) on peut donner une élégante solution du problème suivant. Soit $F(n)$ une fonction de x donnée, et supposons qu'il soit question de trouver l'intégrale définie $\varphi(a)$, telle que

$$\varphi(a)=\int_0^a\frac{F(x)\,dx}{(a-x)^m};$$

m étant un exposant positif plus petit que l'unité, et $F(x)$ une fonction de x qui ne comprend pas le paramètre a parmi ses quantités constantes. Si la forme de $F(x)$ ne permet pas d'exécuter cette intégration, on pourra la développer. Mais, pour plus de généralité je suppeserai $F(x)$ réductible à un polynome fini, ou à une suite infinie de la forme

$$F(x)=A_1x^{p'-1}+A_2x^{p''-1}+A_3x^{p'''-1}+\text{etc.},$$

avec la condition, que chacun des exposans p', p'', p''' etc. soit une quantité positive plus grande ou plus petite que l'unité. Cela posé, si l'on fait $x=ay$, on aura

$$\varphi(a)=A_1a^{p'-m}\int_0^1 dy\,y^{p'-1}(1-y)^{(1-m)-1}+A_2a^{p''-m}\int_0^1 dy\,y^{q''-1}(1-y)^{(1-m)-1}$$
$$+A_3a^{p'''-m}\int_0^1 dy\,y^{p'''-1}(1-y)^{(1-m)-1}+\text{etc.}$$

Donc en appliquant à chacun de ces termes la formule (δ.), nous aurons

$$\varphi(a)=A_1.a^{p'-m}\frac{\Gamma(p').\Gamma(1-m)}{\Gamma(p'+1-m)}+A_2.a^{p''-m}\frac{\Gamma(p'')\Gamma(1-m)}{\Gamma(p''+1-m)}$$
$$+A_3.a^{p'''-m}\frac{\Gamma(p''').\Gamma(1-m)}{\Gamma(p'''+1-m)}+\text{etc.}$$

Cette formule offre un moyen facile pour déterminer la fonction $F(x)$.

qui répond à une expression donnée de $\varphi(a)$. Admettons d'abord, que cette dernière fonction est réductible à la forme

$$\varphi(a) = B_1 a^{q'} + B_2 a^{q''} + B_3 a^{q'''} + \text{etc.},$$

il est clair que nous aurons

$$F(x) = A_1 x^{q'+m-1} + A_2 x^{q''+m-1} + A_3 x^{q'''+m-1} + \text{etc.};$$

$$A_1 = B_1 . \frac{\Gamma(q'+1)}{\Gamma(q'+m)\Gamma(1-m)}; \qquad A_2 = B_2 . \frac{\Gamma(q''+1)}{\Gamma(q''+m)\Gamma(1-m)};$$

$$A_3 = B_3 \frac{\Gamma(q'''+1)}{\Gamma(q'''+m).\Gamma(1-m)}; \text{ etc.}$$

Donc en prenant l'intégrale $\int_0^x F(x)dx$, nous obtiendrons, en ayant égard à l'équation $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.

$$\int_0^x F(x)dx = x^{q'+m} B_1 . \frac{\Gamma(q'+1)}{\Gamma(q'+m)\Gamma(1-m)} + x^{q''+m} B_2 . \frac{\Gamma(q''+1)}{\Gamma(q''+m+1)\Gamma(1-m)}$$
$$+ x^{q'''+m} B_3 . \frac{\Gamma(q'''+1)}{\Gamma(q'''+m+1)\Gamma(1-m)} + \text{etc.}$$

Le second membre de cette équation peut être un polynome, ou une suite infinie; mais il sera toujours sommable à l'aide d'une intégrale définie. En effet, cette équation peut être écrite ainsi:

$$\int_0^x F(x)dx = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(1-m)} \left\{ \begin{array}{l} B_1 x^{q'+m} . \frac{\Gamma(q'+1)\Gamma(m)}{\Gamma(q'+m+1)} \\ + B_2 x^{q''+m} . \frac{\Gamma(q''+1)\Gamma(m)}{\Gamma(q''+m+1)} \\ + B_3 x^{q'''+m} . \frac{\Gamma(q'''+1)\Gamma(m)}{\Gamma(q'''+m+1)} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Or on a, en général,

$$\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(m)}{\Gamma(q+m+1)} = \int_0^1 dz\, z^q (1-z)^{m-1};$$

partant l'équation précédente est équivalente à celle-ci:

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{m-1}} \left\{ \begin{array}{l} B_1 x^{q'+m}.z^{q'} + B_2 x^{q''+m}.z^{q''} \\ + B_3 x^{q'''+m}.z^{q'''} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

ou bien à celle-ci:

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x\,dz}{(x-xz)^{1-m}} \left\{ \begin{array}{l} B_1(xz)^{q'} + B_2(xz)^{q''} \\ + B_3(xz)^{q'''} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Rien n'empêche de faire $xz = a$ dans le second membre de cette équation: alors on écrira

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{m-1}} [B_1 a^{q'} + B_2 a^{q''} + B_3 a^{q'''} + \text{etc.}];$$

et en remplaçant le polynome $B_1 a^{r'} + B_2 a^{r''} +$ etc. par sa valeur donnée $\varphi(a)$, il viendra

$$\int_0^x F(x)\,dx = \frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)\,da}{(x-a)^{1-m}};$$

en se rappelant, que $\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$. Il suit de là qu'on a, en général, ces deux équations:

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{F(x)\,dx}{(a-x)^m}, \qquad \int_0^x F(x)\,dx = \frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)\,da}{(x-a)^{1-m}};$$

m étant un exposant plus petit que l'unité; et $F(x)$ une fonction de x telle que son intégrale (sans l'addition d'aucune constante arbitraire) est nulle pour $x = 0$

En prenant

$$F(x)\,dx = d.f(x) = f'(x)\,dx,$$

on tire de là la conséquence, que

$$f(x) = \frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^m}\int_0^a \frac{f'(x)\,dx}{(a-x)^m}.$$

Mais, afin de rendre cette formule plus expressive je l'écrirai ainsi:

$$f(x) = \frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^m}\int_0^a \frac{f'(b)\,db}{(a-b)^m}.$$

En faisant $m = \frac{1}{2}$, la question que nous venons de résoudre se rapporte au mouvement oscillatoire d'un point materiel pésant sur une courbe. Par ces formules on a, sous forme finie, la solution du problème direct et du problême inverse. La marche que j'ai suivie pour arriver à ces formules est naturellement indiquée par les propriétés de la fonction Γ (*gamma*) introduite dans l'analyse par *Legendre*. On peut, à la vérité, trouver ces mêmes formules sans imaginer le développement de la fonction $F(x)$. La solution donnée par *Abel* dans le Journal de Mr. *Crelle* (tome 3. p. 153) en est exempte; mais alors il n'est pas aussi facile de saisir l'esprit des transformations qu'on emploie. J'ai préféré donner ici la solution du problème telle que je l'avais effectivement trouvée de mon côté, en allant du plus simple au composé.

§. 15.

Je vais maintenant développer plusieurs conséquences importantes qu'on peut tirer des deux formules (β.) et (γ.) établies vers la fin du §. 13.

Remarquons d'abord qu'en faisant $q=p$, l'équation (β.) donne

$$\beta'.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\right]^2}{n\Gamma\left(\frac{2p}{2}\right)}.$$

Donc en remplaçant $\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)$ par sa valeur déduite de l'équation (42.) $\left(\text{en y faisant } q=\frac{p}{n}\right)$, on aura

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}} = 2^{1-\frac{2p}{n}}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Or, en vertu de la même équation (β.), il suffit d'écrire $\Gamma\left(\frac{p+\frac{1}{2}n}{n}\right)$ au lieu de $\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{1}{2}\right)$, pour voir aussitôt, que cette dernière équation est équivalente à celle-ci:

$$\beta''.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} = 2^{1-\frac{2p}{n}}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{\frac{1}{2}n}{n}-1}$$
$$= 2^{1-\frac{2p}{n}}\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Cette transformation est vraie sans définir l'exposant n; mais si cet exposant est un nombre entier *pair*, cette équation offre un rapport remarquables entre deux intégrales semblables, où le degré du radical est le même. Au reste, cette même équation se trouve dans la page 93 du Mémoire *sur les transcendantes elliptiques* publié par *Legendre* en 1794. Mais la manière dont nous la rencontrons ici, a l'avantage de pouvoir conduire à plusieurs autres relations analogues. Voici comment on y parvient.

La fonction $\Gamma(a)$ étant telle que $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, la formule (γ.) revient à dire, que

$$\gamma'.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q = \frac{q}{p+nq}.\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{n}+q\right)}.$$

Donc, en faisant successivement $p=1$, $p=2$, on a

$$\int_0^1 dx(1-x^n)^q = \frac{q}{1+qn}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+q\right)};$$

$$\int_0^1 x\,dx\,(1-x^n)^q = \frac{q}{2+qn}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right).\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+q\right)};$$

et en faisant le produit de ces deux équations:

$$\int_0^1 dx(1-x^n)^q\int_0^1 x\,dx(1-x^n)^q = \frac{q^2}{(1+qn)(2+qn)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right).[\Gamma(q)]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+q\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}+q\right)}.$$

Cela posé, si nous regardons, pour un moment, q comme nombre entier et positif, la formule (32.) donne

$$\int_0^1 dx(1-x^n)^q = \frac{n^q}{(1+qn)}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots.q}{(1+n)(1+2n)(1+3n)\ldots.[qn-(n-1)]};$$

$$\int x\,dx(1-x^n)^q = \frac{n^q}{(2+qn)}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots.q}{2(2+n)(2+2n)(2+3n)\ldots.[qn-(n-2)]}.$$

Donc, en faisant le produit de ces deux expressions et l'égalant ensuite à sa valeur précédente, il suffira de remarquer, que, $1.2.3\ldots.q=\Gamma(q+1)$ $=q\Gamma(q)$ pour en tirer l'équation

$$\beta'''.\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+q\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}+q\right)} = \frac{n^{2q}}{A.B};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité:

$$A = (1+n)(1+2n)(1+3n)\ldots.(qn-(n-1));$$
$$B = 2(2+n)(2+2n)(2+3n)\ldots.(qn-(n-2)).$$

Maintenant, si l'on faisait ici $n=2$, on retomberait sur l'équation (42.); mais en prenant $n=3$, on obtient

$$A = 1.4.7.10.13\ldots.3q-2$$
$$B = 2.5.8.11.14\ldots.3q-1$$

et par conséquent

$$\frac{1}{AB} = \frac{3^{q-1}(1.2.3.4\ldots.q-1)}{1.2.3.4.5\ldots.3q-1};$$

comme on peut s'en convaincre avec un peu de réflexion: partant nous vons

$$\frac{1}{AB} = \frac{3^{q-1}.\Gamma(q)}{\Gamma(3q)}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (β'''.), on en tire

$$\beta^{\text{IV}}.\quad \Gamma(3q) = 3^{3q-1}.\frac{\Gamma(q).\Gamma(q+\frac{1}{3}).\Gamma(q+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3})};$$

où q peut avoir une valeur positive quelconque.

Actuellement, si nous faisons $q=2p$ dans l'équation (β.) on obtient

$$\beta^{\text{V}}.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{2p}{n}-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{3p}{n}\right)};$$

Donc, en faisant $q=\frac{p}{n}$ dans l'équation (β^{IV}.), et éliminant ensuite $\Gamma\left(\frac{3p}{n}\right)$, par la combinaison de ces deux équations, il viendra

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{2p}{n}-1} = \frac{3^{1-\frac{3p}{n}}}{n}.\frac{\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3}).\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{1}{3}\right).\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{2}{3}\right)}.$$

Le second membre de cette équation peut être écrit ainsi:

$$3^{1-\frac{3p}{n}}.\frac{n\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\right]^2}.\frac{\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{1}{3}\right)}.\frac{\Gamma(\frac{2}{3}).\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{2}{3}\right)}.$$

Or, il suffit de rapprocher de cette expression les formules (β.) et (β'.) pour qu'il soit manifeste, que l'équation précédente est équivalente à celle-ci:

$$\beta^{\text{VI}}.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}.\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{2p}{n}-1}$$
$$= 3^{1-\frac{3p}{n}}.\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{\frac{1}{3}n}{n}-1}.\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{\frac{2}{3}n}{n}-1},$$

de sorte que, si n est un nombre divisible par 3, on a par cette équation une relation entre quatre intégrales de la forme

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1},$$

où les exposans p et n sont les mêmes, et les valeurs de q sont p $2p$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{2}{3}n$.

Avant d'aller plus loin, il convient de simplifier l'écriture de ces intégrales définies, en posant

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

pour toute intégrale de cette espèce qui se rapporte à la même valeur

de n. Ce symbole, à la fois abrégé et significatif, a été proposé par *Euler* et adopté par *Legendre*.

Suivant cette notation, les deux équations (β''.) et (β^{v}.) reviennent à dire, que

$$a''.\quad \left(\frac{p}{p}\right) = 2^{1-\frac{2p}{n}}.\left(\frac{p}{\frac{1}{2}n}\right);\quad \left(\frac{p}{2p}\right) = 3^{1-\frac{3p}{n}}.\frac{\left(\frac{p}{\frac{1}{3}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{3}n}\right)}{\left(\frac{p}{p}\right)}.$$

Et, par la seule inspection de l'équation (β.), il est manifeste, que toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ demeure invariable par la permutation des deux lettres p et q; c'est-à-dire qu'on a

$$a'''.\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

Cela posé, si nous revenons à la formule (γ'.) on aura, en y faisant $p=3$:

$$\int_0^1 x^2\,dx(1-x^n)^q = \frac{q}{3+qn}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right).\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}+q\right)};$$

et en posant de même $p=3$ dans la formule (32.), on a

$$\int_0^1 x^2\,dx(1-x^n)^q = \frac{n^q}{3+qn}.\frac{1.2.3.4\ldots.q}{3(3+n)(3+2n)\ldots.[qn-(n-3)]}.$$

En rapprochant ces deux équations de celles qu'on a formé plus haut en prenant $p=1$, $p=2$, et faisant ensuite le produit des trois intégrales

$$\int_0^1 dx(1-x^n)^q,\quad \int_0^1 x\,dx(1-x^n)^q,\quad \int_0^1 x^2\,dx(1-x^n)^q,$$

on trouvera, en égalant les deux expressions de ce produit, l'équation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right).\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+q\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}+q\right).\Gamma\left(\frac{3}{n}+q\right)} = \frac{n^{3q}}{ABC};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$C = 3(3+n)(3+2n)(3+3n)\ldots.(qn-(n-3)).$$

Actuellement, si nous faisons $n=4$, on aura

$$A = 1.5.\ 9.13\ldots.4q-3;$$
$$B = 2.6.10.14\ldots.4q-2;$$
$$C = 3.7.11.15\ldots.4q-1;$$
$$\frac{1}{ABC} = \frac{4^{q-1}(1.2.3\ldots.q-1)}{1.2.3.4\ldots.4q-1} = \frac{4^{q-1}.\Gamma(q)}{\Gamma(4q)};$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{2}{4}).\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}+q).\Gamma(\frac{2}{4}+q).\Gamma(\frac{3}{4}+q)} = 4^{4q-1}.\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(4q)};$$

d'où l'on tire

$$\beta^{\text{VII}}.\quad \Gamma(4q) = 4^{4q-1}.\frac{\Gamma(q).\Gamma(\frac{1}{4}+q).\Gamma(\frac{2}{4}+q).\Gamma(\frac{3}{4}+q)}{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{2}{4}).\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

Cela posé, j'observe que la formule (β.) donne

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{3p}{n}-1} = \left(\frac{p}{3p}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{3p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{4p}{n}\right)}.$$

Donc, en éliminant $\Gamma\left(\frac{4p}{n}\right)$, à l'aide de la formule précédente, on aura

$$\left(\frac{p}{3p}\right) = \frac{4^{1-\frac{4p}{n}}}{n}.\frac{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{2}{4}).\Gamma(\frac{3}{4}).\Gamma\left(\frac{3p}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{4}+\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{p}{n}\right)}.$$

Le second membre de cette équation peut être mis sous cette forme

$$4^{1-\frac{4p}{n}}\frac{n\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\right]^2}.\frac{n\Gamma\left(\frac{3p}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right)}.\frac{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{n}\right)}.\frac{\Gamma(\frac{2}{4}).\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2}{4}+\frac{p}{n}\right)}.\frac{\Gamma(\frac{3}{4}).\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{p}{n}\right)}.$$

En rapprochant cette expression des formules (β.), (β'.), (β^{V}.), on verra aussitôt, que l'équation précédente est équivalente à celle-ci:

$$\beta^{\text{VIII}}.\quad \left(\frac{p}{3p}\right) = 4^{1-\frac{4p}{n}}.\frac{\left(\frac{p}{\frac{1}{4}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{4}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{3}{4}n}\right)}{\left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{p}{2p}\right)}.$$

On trouvera de la même manière

$$\beta^{\text{IX}}.\quad \Gamma(5q) = 5^{5q-1}.\frac{\Gamma(q).\Gamma(\frac{1}{5}+q).\Gamma(\frac{2}{5}+q).\Gamma(\frac{3}{5}+q).\Gamma(\frac{4}{5}+q)}{\Gamma(\frac{1}{5}).\Gamma(\frac{2}{5}).\Gamma(\frac{3}{5}).\Gamma(\frac{4}{5})},$$

$$\beta^{\text{X}}.\quad \left(\frac{p}{4p}\right) = 5^{1-\frac{5p}{n}}.\frac{\left(\frac{p}{\frac{1}{5}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{5}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{3}{5}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{4}{5}n}\right)}{\left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{p}{2p}\right)\left(\frac{p}{3p}\right)}.$$

En général, m étant un nombre entier positif quelconque, on a:

$$\kappa.\quad \Gamma(mq) = m^{mq-1}.\frac{\Gamma(q).\Gamma\left(\frac{1}{m}+q\right).\Gamma\left(\frac{2}{m}+q\right)\dots.\Gamma\left(\frac{m-1}{m}+q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(\frac{2}{m}\right).\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)\dots.\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)};$$

$$\lambda. \quad \left(\frac{p}{mp}\right) = (m+1)^{1-(m+1)\frac{p}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{p}{\frac{1}{m}.n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{m}.n}\right)\left(\frac{p}{\frac{3}{m}.n}\right)\cdots\left(\frac{p}{\frac{m-1}{m}.n}\right)}{\left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{p}{2p}\right)\left(\frac{p}{3p}\right)\cdots\left(\frac{p}{(m-1)p}\right)}.$$

Legendre a trouvé d'une manière fort différente la formule ($\varkappa$.) comme on peut le voir dans le Tome 2. de ses Exer. de Calc. Int. (page 23). Mais la formule (λ) me paraît nouvelle. Plus loin on verra les avantages qu'elle offre pour la réduction des intégrales *Eulériennes* représentées par le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$.

(La suite dans le cahier prochain.)

2.

Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données.

(Par Mr. G. *Lejeune Dirichlet*, prof. à l'université de Berlin.)

Les séries que nous nous proposons de considérer, dans ce mémoire, sont ordonnées suivant des fonctions d'une forme particulière, fonctions dont *Legendre* a le premier fait usage dans ses belles recherches sur l'attraction des ellipsoïdes de révolution et sur la figure des planètes. Ces fonctions jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables et les séries qui en sont formées, sont propres à représenter des fonctions arbitraires entre certaines limites. La généralité de cette dernière proposition n'ayant pas été jugée suffisamment établie *) par les considérations qui amènent les développements de ce genre dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes, on a cherché à la prouver d'une manière directe et indépendante de cette théorie.

Si l'on désigne par P_n le coëfficient de α^n dans la valeur développée du radical

$$\frac{1}{\sqrt{[1-2\alpha(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi))+\alpha^2]}}$$

la proposition dont il s'agit, sera exprimée par l'équation

$$(a.)\quad f(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^{\pi}\partial\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}P_n f(\theta',\varphi')\partial\varphi'$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de θ et de φ comprises entre les limites $\theta=0$ et $\theta=\pi$, $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$, la fonction $f(\theta,\varphi)$ restant entièrement arbitraire entre ces limites et étant seulement assujettie à ne pas devenir infinie. En ayant égard à l'origine de P_n, l'on prouve que ce coëfficient considéré comme fonction des deux angles θ et φ, est une expression rationnelle et entière du degré n des 3 quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, qui satisfait à cette équation aux différences partielles

$$(b.)\quad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial P_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 P_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)P_n=0.$$

---

*) Mécanique céleste, tome II, pag. 72.

Comme les intégrations, dans l'équation (*a.*), ont lieu entre des limites constantes et sont relatives à des variables indépendantes de θ et de φ, il est évident que le terme général

$$X_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi \partial\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, \partial\varphi'$$

sera aussi une fonction rationnelle et entière du degré n de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, et qui satisfera pareillement à l'équation

$$(c.)\qquad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)X_n = 0.$$

La proposition citée revient donc à dire qu'une fonction quelconque $f(\theta, \varphi)$ de deux variables peut être exprimée pour toutes les valeurs de θ et φ comprises entre les limites indiquées, par une série de la forme

$$f(\theta, \varphi) = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots,$$

dans laquelle X_n est une fonction rationnelle et entière du degré n de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, telle que l'équation (*c.*) ait lieu. Mr. *Poisson* qui a appliqué la série (*a.*) à des questions très variées de physique et de mécanique, en a donné une démonstration qui revient à peu près à ce qui suit *). Il suppose que les termes de cette série sont multipliés par les puissances successives d'une fraction positive α, c'est-à-dire qu'il considère la série

$$\frac{1}{4\pi}\iint f(\theta', \varphi') \sin\theta'\, \partial\theta'\, \partial\varphi' \,\Sigma(2n+1) P_n \alpha^n.$$

L'opération indiquée par le signe Σ étant effectuée, il fait voir que l'intégrale double qui exprime la somme de la série ainsi modifiée, converge vers la limite $f(\theta, \varphi)$, lorsque la fraction α converge vers l'unité. De ce résultat que *Lagrange* avait déjà obtenu d'une autre manière **), il conclut l'équation (*a.*) en posant $\alpha = 1$. On voit que cette manière de procéder renferme implicitement deux suppositions. On admet que la série précédente dont la convergence est évidente tant que la quantité α reste inférieure à l'unité, conserve encore cette propriété pour $\alpha = 1$. On suppose encore que la valeur de la série correspondante à $\alpha = 1$, est en

---

*) Journal de l'École polyt., 19me cah. p. 145: Additions à la connaissance des temps pour l'an 1829 et pour l'an 1831. Théorie math. de la chaleur, pag. 212.

**) Journal de l'École polytechn. 15me cah. pag. 66.

effet la limite de celle qui a lieu pour une fraction qu'on suppose converger vers l'unité. Cette seconde supposition ne doit pas paraître évidente, car il existe des séries dont les termes sont des fonctions continues d'une même variable α, et qui changent néanmoins d'une quantité finie lorsque la variable varie infiniment peu. Mais cette circonstance ne saurait avoir lieu dans le cas actuel, car l'on peut prouver généralement que les séries ordonnées suivant les puissances d'une variable α sont nécessairement des fonctions continues de cette variable, tant qu'elles restent convergentes*). Tout se réduit donc à prouver que la série (a.) est convergente.

Pour établir ce point essentiel, l'illustre auteur transforme le terme général au moyen de l'intégration par parties deux fois appliquée à chacune des variables θ', φ' et en ayant égard à l'équation (b.). Les termes que cette double opération fait sortir du signe, se détruisant aux limites, il introduit dans l'intégrale transformée l'expression approchée que *Laplace* a donnée pour P_n lorsque l'indice n est très-grand, et il conclut que les termes très éloignés de la série (a.) finissent par devenir inférieurs à $\frac{A}{n\sqrt{n}}$, A désignant une constante**). Ce résultat étant supposé avoir lieu, la convergence de la série s'ensuit rigoureusement. Mais pour y parvenir, Mr. *Poisson* est obligé de faire plusieurs suppositions qui peuvent n'avoir pas lieu. Il suppose que les coëfficiens différentiels du premier et du second ordre de $f(\theta', \varphi')$ relatifs à l'une et à l'autre des variables restent finis, il suppose de plus que la fonction $f(\theta', \varphi')$ devient indépendante de φ', lorsqu'on y pose $\theta' = 0$. Outre ces restrictions que Mr. *Poisson* énonce, il y en a d'autres qui sont également nécessaires pour le succès de son analyse. Il faut encore, que $f(\theta', \varphi')$ et ses deux dérivées $\frac{\partial f(\theta', \varphi')}{\partial \theta'}$, $\frac{\partial f(\theta', \varphi')}{\partial \varphi'}$ soient des fonctions continues, car si cette circonstance n'avait pas lieu, les termes que l'intégration par parties fait sortir du signe, subsisteraient quoiqu'ils disparaissent aux limites des intégrations. Les différentes circonstances dont la transformation qu'on vient d'indiquer, exige l'absence, peuvent se trouver réunies dans des cas très simples. Supposons, par exemple, que la fonction $f(\theta', \varphi')$ ne renferme que θ', et soit

*) Voyez sur ce point un mémoire de l'illustre *Abel*. Tome I. pag. 314 de ce journal.
**) Connaissance des temps pour l'an 1831.

exprimée par $\cos^k \theta'$ (k désignant une constante positive inférieure à l'unité) tant que $\theta' < \frac{\pi}{2}$, et égale à zéro lorsque $\theta' > \frac{\pi}{2}$. Dans cet exemple auquel Mr. *Poisson* a appliqué la série ($a.$),*) la fonction $f(\theta')$ est continue, mais il n'en est pas de même de son coëfficient différentiel, qui devient infini pour $\theta' = \frac{\pi}{2}$ et passe ensuite brusquement à la valeur zéro, qu'il conserve dans tout l'intervalle compris entre $\theta' = \frac{\pi}{2}$ et $\theta' = \pi$. Dans ce cas particulier, le terme général transformé se présente comme la différence de deux quantités infinies.

Il y a, au reste, une remarque générale à faire sur la série ($a.$), qui s'applique également à toutes les autres formes de développement propres à représenter des fonctions arbitraires, c'est-à-dire des fonctions qui ne sont assujetties à aucune loi analytique. Les séries de ce genre, quoique toujours convergentes lorsque la fonction qu'elles développent, ne devient pas infinie, ne jouissent pas toujours de cette propriété en vertu du seul décroissement de leurs termes. Il existe des cas pour lesquels cette convergence résulte de la manière dont les termes consécutifs se détruisent en partie par l'opposition de signe, en sorte que les termes réduits à leurs valeurs numériques, formeraient une série divergente, et si une démonstration complète de la convergence de ces sortes de développements présente quelque difficulté, elle tient surtout à la possibilité de pareils cas. Quoi qu'il en soit, il résulte du moins de cette remarque très simple et qu'il serait facile de justifier par de nombreux exemples que tout moyen de démonstration qui n'aurait égard qu'au seul décroissement des termes, est nécessairement incomplet et ne saurait embrasser tous les cas.

Il existe un autre procédé qu'on peut appliquer aux questions de ce genre, procédé exempt des difficultés qu'on vient d'indiquer, et qui dérive d'ailleurs naturellement de l'idée que l'on doit se faire de la somme d'une suite infinie. Une pareille somme n'étant autre chose que la limite vers laquelle converge la somme des n premiers termes, lorsque n devient de plus en plus grand, on parviendra à une démonstration complète en déterminant la limite dont il s'agit. C'est ce procédé que j'ai déjà employé pour démontrer la formule qui exprime une fonction arbitraire par

*) Connaissance des temps pour 1829, pag. 348.

une série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de la variable *).

L'application du même moyen de démonstration à la série (a.) est moins facile, non seulement parce que les termes de cette série sont donnés par une double intégration, mais surtout parce que, la fonction P_n étant plus compliquée qu'un simple sinus ou cosinus, il faut introduire une nouvelle expression intégrale pour pouvoir exécuter l'intégration aux différences finies étendue à un nombre indéterminé de termes. Néanmoins, si l'on met P_n d'une manière convenable sous forme d'intégrale définie, la somme des n premiers termes de la série prend une forme assez simple et la limite vers laquelle converge cette somme, pour des valeurs croissantes de n, résulte du même théorème dont j'ai déjà fait usage dans le mémoire cité. Je commence par quelques recherches préliminaires sur le coëfficient P_n.

§. 1.

Si l'on désigne par γ un angle réel que nous supposons compris entre 0 et π, et par α une fraction positive ou négative, le radical $\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}$ peut être développé suivant les puissances positives de α:

$$(1.)\quad \frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}} = P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots\ldots+P_n\alpha^n+\ldots\ldots$$

Le coëfficient P_n est, comme l'on sait, une fonction rationnelle et entière de $\cos\gamma$, ayant pour expression

$$2.\quad P_n = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.n}\left[\cos^n\gamma - \frac{n(n-1)}{2(2n-2)}\cos^{n-2}\gamma + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\gamma - \text{etc.}\right].$$

Je ferai observer, en passant, qu'on a aussi

$$P_n = 1 - \frac{(n+1)n}{1^2}\sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2.2^2}\sin^4\frac{\gamma}{2} - \frac{(n+3)(n+2)\ldots.(n-2)}{1^2.2^2.3^2}\sin^6\frac{\gamma}{2} + \text{etc.}$$

$$P_n = (-1)^n\left[1 - \frac{(n+1)n}{1^2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2.2^2}\cos^4\frac{\gamma}{2} - \frac{(n+3)(n+2)\ldots.(n-2)}{1^2.2^2.3^2}\cos^6\frac{\gamma}{2} + \text{etc.}\right],$$

*) Vol. IV. de ce journal, pag. 157.

$$P_n = \cos^{2n}\frac{\gamma}{2}\left[1-\left(\frac{n}{1}\right)^2\tang^2\frac{\gamma}{2}+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2\tang^4\frac{\gamma}{2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)^2\tang^6\frac{\gamma}{2}+\text{etc.}\right].$$

Ces expressions très-simples et qui sont faciles à démontrer, ne paraissent pas avoir été remarquées.

Le même coëfficient peut être développé suivant les cosinus des multiples de γ *):

$$\tfrac{1}{2}P_n = \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.2n}\cos n\gamma + \frac{1.3\ldots.(2n-3)}{2.4\ldots.(2n-2)}\cdot\frac{1}{2}\cos(n-2)\gamma$$
$$+\frac{1.3\ldots.(2n-5)}{2.4\ldots.(2n-4)}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cos(n-4)\gamma + \text{etc.}$$

expression qui a l'avantage de faire voir que la valeur numérique de P_n ne surpasse jamais l'unité. En effet, les coëfficiens de $\cos n\gamma$, $\cos(n-2)\gamma$, ... étant tous positifs, il est évident que cette valeur numérique correspondante à une valeur quelconque de γ ne saurait surpasser celle qui a lieu pour $\gamma = 0$, et il résulte d'un autre côté de l'équation (1.), que, dans ce cas particulier, P_n se réduit à l'unité.

Laplace a fait voir que P_n peut être exprimé par cette intégrale définie **)

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\gamma - \sin\gamma\cos\psi\sqrt{-1}]^n\,\partial\psi.$$

C'est de cette expression de P_n que cet illustre géomètre a conclu la valeur approchée dont il a été question plus haut ***). Il y est parvenu au moyen de la belle méthode dont l'Analyse lui est redevable et qui a pour objet d'obtenir les valeurs finales des intégrales définies où il entre sous le signe d'intégration des exposans qu'on suppose de plus en plus grands.

L'objet de ce mémoire exige que nous mettions P_n sous forme d'intégrale définie. L'expression précédente ne se prêtant pas bien aux calculs que nous avons à faire, à cause des quantités imaginaires qui y entrent et qu'on ne saurait chasser sans que l'entier n paraisse à la fois comme exposant et comme facteur sous le signe trigonométrique, nous allons chercher une autre intégrale plus appropriée à la recherche qui nous occupe. Pour obtenir cette nouvelle expression de P_n, remplaçons dans

---

*) Exercices de calcul intégral, tome II. pag. 248.

**) Mécanique céleste, tome V. pag. 32.

***) Mécanique céleste, tome V. pag. 33. Voyez aussi le supplément au tome V. pag. 2.

l'équation (1.), a par $e^{\psi\sqrt{-1}}$, ψ désignant un angle indépendant de γ et compris comme ce dernier entre 0 et π.

Le second membre de cette équation prendra la forme $G+H\sqrt{-1}$, en posant pour abréger,

$$G = P_0+P_1\cos\psi+P_2\cos 2\psi+\ldots\ldots+P_n\cos n\psi+\ldots\ldots$$
$$H = P_1\sin\psi+P_2\sin 2\psi+\ldots\ldots\ldots\ldots+P_n\sin n\psi+\ldots\ldots$$

Quant au premier membre, on trouve que sa partie réelle a une expression différente selon que ψ est inférieur ou supérieur à γ, et qu'il en est de même du coëfficient de $\sqrt{-1}$. Cette partie réelle étant dans le premier cas, $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}$, et dans le second, $\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}$, on aura aussi $G=\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}$ ou $G=\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}$ selon que $\psi<\gamma$ ou $\psi>\gamma$. On trouve pareillement

$$H=\frac{-\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} \quad \text{ou} \quad H=\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}},$$

selon que $\psi<\gamma$ ou $\psi>\gamma$.

On a d'un autre côté, par la *théorie* connue des séries de sinus et de cosinus,

$$P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi G\cos n\psi\,\partial\psi \quad \text{et} \quad P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi H\sin n\psi\,\partial\psi.$$

Si l'on partage chacune de ces intégrales en deux autres prises entre les limites 0 et γ, γ et π, et qu'on mette ensuite pour G et H leurs valeurs données plus haut, il viendra

$$3.\quad P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}+\frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi\frac{\cos n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}};$$
$$4.\quad P_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}+\frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi\frac{\sin n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}},$$

où il est essentiel de remarquer, que, d'après la théorie citée, le second membre de l'équation (3.) doit être réduit à moitié lorsque $n=0$, et que l'équation (4.) ne s'applique pas à ce cas, P_0 n'entrant pas dans la série H.

Le procédé qui vient de nous conduire à cette double expression de P_n, n'est pas rigoureux en ce que nous n'avons pas démontré que les séries G et H sont convergentes. Cette convergence a effectivement lieu, le cas excepté où $\psi=\gamma$, pour lequel les fonctions de ψ que ces séries représentent, deviennent infinies. Mais comme la considération de ces séries exigerait trop de détails, nous ne nous y arrêterons pas et nous allons faire voir, a posteriori, et par un calcul très simple que les intégrales

précédentes expriment en effet les coëfficiens du développement du radical

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}.$$

Si l'on désigne par Q_n la première des deux intégrales contenues dans l'équation (3.), on aura

$$Q_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\,\partial\psi$$

et la valeur numérique de Q_n sera évidemment inférieure à

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} = 1.$$

La série

$$\tfrac{1}{2}Q_0 + Q_1\alpha + Q_2\alpha^2 + \ldots + Q_n\alpha^n + \ldots$$

dans laquelle α désigne une fraction positive ou négative, sera donc convergente. Pour en obtenir la somme, mettons à la place de $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, ce que ces lettres représentent. Il viendra ainsi

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\left(\tfrac{1}{2}+\alpha\cos\psi+\alpha^2\cos2\psi+\ldots\right)$$

ou si l'on remplace la série convergente sous le signe par sa valeur connue $\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}$,

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\cdot\frac{1}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}.$$

L'introduction d'une nouvelle variable s telle que $s\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\psi}{2}$, changera l'intégrale en celle-ci

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi}\int_0^1 \frac{\partial s}{\sqrt{(1-s^2)}}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot s^2}.$$

L'intégration étant effectuée par les méthodes connues, on trouve

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}Q_0 + Q_1\alpha + Q_2\alpha^2 + \ldots + Q_n\alpha^n + \ldots$$

On pourrait obtenir d'une manière semblable la somme de la série

$$\tfrac{1}{2}R_0 + R_1\alpha + R_2\alpha^2 + \ldots + R_n\alpha^n + \ldots,$$

R_n désignant pour abréger la seconde des intégrales (3.). Mais on y parvient plus simplement par la considération suivante. Le terme général

$$R_n\alpha^n = \frac{2}{\pi}\alpha^n\int_\gamma^\pi \frac{\cos n\psi \sin\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}$$

prendra cette autre forme, si l'on remplace ψ par $\pi-\psi$, et que l'on observe qu'on a $\cos n(\pi-\psi)=(-1)^n\cos n\psi$,

$$\frac{2}{\pi}(-\alpha)^n \int_0^{\pi-\gamma} \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos(\pi-\gamma))]}}$$

Sous cette forme, il est evident que ce terme général résulte de celui de la série déjà sommée et qui est

$$Q_n\alpha^n = \frac{2}{\pi}\alpha^n \int_0^{\gamma} \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}$$

en changeant simultanément α en $-\alpha$ et γ en $\pi-\gamma$. En faisant donc ce double changement dans l'expression de la somme de la première série, on trouve pour celle de la seconde

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}R_0+R_1\alpha+R_2\alpha^2+\ldots\ldots+R_n\alpha^n+\ldots\ldots$$

En ajoutant les deux séries, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots\ldots+P_n\alpha^n+\ldots\ldots,$$

P_n désignant généralement l'expression (3.), ce qu'il s'agissait de faire voir.

Pour vérifier l'équation (4.), qui n'a pas lieu pour $n=0$, considérons d'abord la série dont le terme général est le produit de α^n et de la première des intégrales qui y entrent. Ce terme général est

$$-\frac{2}{\pi}\alpha^n\int_0^{\gamma} \frac{\sin n\psi \sin\frac{\psi}{2}\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}.$$

En attribuant à n toutes les valeurs entières à partir de $n=1$, et faisant la somme, il viendra

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}(\alpha\sin\psi+\alpha^2\sin 2\psi+\ldots\ldots)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\;\frac{\alpha\sin\psi}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}.$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{\alpha\sin\psi\sin\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\alpha)^2\cos\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2},$$

l'expression précédente devient

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} + \frac{(1-\alpha)^2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,\partial\psi}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\cdot\frac{1}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}.$$

En mettant pour ces deux intégrales dont la seconde s'est déjà présentée plus haut lorsqu'on a sommé la suite $\frac{1}{2}Q_0+Q_1\alpha+$ etc., leurs valeurs, il viendra

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}.$$

Si l'on considère en second lieu la série dont le terme général est égal à la seconde des intégrales (4.) multipliée par α^n, on s'assurera, comme plus haut, que cette série résulte de celle qu'on vient de sommer, en changeant simultanément α en $-\alpha$ et γ en $\pi-\gamma$. Cette nouvelle série a donc pour somme

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}.$$

En réunissant les deux résultats, on obtient cette équation

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}-1 = P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots\ldots+P_n\alpha^n+\ldots\ldots,$$

P_n étant donné par l'équation (4.), qui se trouve ainsi vérifiée.

§. 2.

Après ces préliminaires, nous allons considérer la série

$$5.\qquad \frac{1}{4\pi}\Sigma(2n+1)\int_0^\pi \partial\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi} P_n f(\theta',\varphi')\,\partial\varphi',$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les valeurs entières de n depuis zéro jusqu'à l'infini, et la fonction $f(\theta',\varphi')$ étant donnée d'une manière arbitraire depuis $\theta'=0$, $\varphi'=0$ jusqu'à $\theta'=\pi$, $\varphi'=2\pi$. On suppose seulement que cette fonction ne devient pas infinie entre ces limites. Quant à P_n, c'est le coëfficient de α^n dans la valeur développée du radical $\frac{1}{\sqrt{[1-2\alpha(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi))+\alpha^2]}}$. On obtiendra ce coëfficient, si l'on suppose $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)$ dans l'une des expressions de P_n obtenues dans le §. précédent.

Pour sommer la suite (5.), nous considérerons la somme de ses $n+1$ premiers termes, et nous montrerons que cette somme converge vers une limite lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre entier n. Supposons d'abord $\theta=0$, cas auquel il sera très facile de ramener ensuite celui d'une valeur quelconque de cette variable. Cela étant, on aura $\cos\gamma=\cos\theta'$, et P_n ne contiendra pas la variable φ'. Si l'on pose pour abréger

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\,\partial\varphi' = F(\theta')$$

et que l'on écrive γ à la place de θ', la somme du $n+1$ premiers termes de la série deviendra

$$S=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f[P_0+3P_1+5P_2+\ldots\ldots+(2n+1)P_n]F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma.$$

La lettre θ' ayant été remplacée par γ, les expressions de $P_0, P_1, P_2, \ldots$ seront celles qui résultent des équations (3.) et (4.), sans y rien changer

La somme précédente peut être partagée en celles-ci

$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(P_0+P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n)F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma,$$

$$U = \int_0^{\pi}(P_1+2P_2+\ldots\ldots\ldots+nP_n)F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma,$$

que nous examinerons l'une après l'autre. En introduisant dans la première, les expressions de $P_0, P_1, \ldots\ldots P_n$ données par l'équation (3.), et ayant égard à la formule connue

$$1+2\cos\psi+2\cos 2\psi+\ldots\ldots+2\cos n\psi = \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}},$$

il viendra

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\partial\gamma F(\gamma)\sin\gamma\left(\int_0^{\gamma}\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}\partial\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}\partial\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}\right).$$

Quoique les intégrations relatives à ψ doivent être effectuées entre des limites dépendantes de la variable γ, à laquelle se rapporte l'autre intégration, on peut facilement intervertir l'ordre des deux intégrations. Il suffit pour cela de faire usage de la formule suivante

$$6.\quad \int_0^a\partial x\int_0^x\varphi(x,y)\partial y = \int_0^a\partial y\int_y^a\varphi(x,y)\partial x,$$

qu'il est très facile de démontrer et qui devient tout à fait évidente, lorsqu'on l'envisage sous un point de vue géométrique. En effet, si l'on conçoit que x, y, $\varphi(x,y)$ soient les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface courbe, on voit sur le champ que les intégrales précédentes représentent l'une et l'autre la partie de l'espace comprise entre cette surface, le plan des x, y et les trois plans perpendiculaires à ce dernier et dont les équations sont $y=0$, $x=a$, et $y=x$.

On transformera la première partie de T, en l'assimilant au premier membre de l'égalité précédente et en remplaçant ce premier membre par le second, et l'on opérera en sens inverse pour la seconde partie de T.

On trouve ainsi

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{1}{2}\psi}\Pi(\psi)\partial\psi,$$

en posant pour abréger,

$$\Pi(\psi) = \cos\tfrac{1}{2}\psi\int_\psi^\pi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} + \sin\tfrac{1}{2}\psi\int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}.$$

$\Pi(\psi)$ sera une fonction de ψ qui reste finie pour toute valeur de ψ comprise entre 0 et π. En effet, si l'on désigne par M, abstraction faite du signe, la plus grande valeur de $F(\gamma)$ depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\pi$, il est évident que la valeur numérique de l'intégrale $\int_\psi^\pi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}}$ est moindre que

$$M\int_\psi^\pi \frac{\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} = 2M\cos\frac{\psi}{2}.$$

L'autre intégrale est inférieure à $2M\sin\frac{\psi}{2}$ et parconséquent $\Pi(\psi)$ moindre que $2M$.

La fonction $\Pi(\psi)$ ne devenant pas infinie, on déterminera facilement la limite vers laquelle T converge au moyen d'un théorème qui se présente dans la théorie des séries de sinus et de cosinus. En posant $\psi=2\beta$, il viendra

$$T = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\Pi(2\beta)\,\partial\beta$$

et l'on conclura immédiatement de ce théorème, (Voyez la note à la fin du mémoire) que la limite de T pour des valeurs de n indéfiniment croissantes est égale à $\frac{1}{2}\Pi(0)$. En ayant égard à ce que $\Pi(\psi)$ représente, on trouve $\Pi(0) = \int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,\partial\gamma$. La limite vers laquelle T converge, est donc $\frac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,\partial\gamma$.

§. 3.

Passons maintenant à la considération de U. En y mettant pour $P_1, P_2, \ldots P_n$ les expressions que fournit l'équation (4.), et intervertissant ensuite l'ordre des intégrations au moyen de la formule (6.), on aura

$$7.\quad U = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta(\psi)(\sin\psi + 2\sin 2\psi + \ldots + n\sin n\psi)\,\partial\psi,$$

en posant pour abréger,

$$\Theta(\psi) = -\sin\tfrac{1}{2}\psi\int_\psi^\pi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]}} + \cos\tfrac{1}{2}\psi\int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}.$$

Les deux intégrales que renferme $\Theta(\psi)$, étant les mêmes que celles qui entrent dans $\Pi(\psi)$, on conclut comme précédemment que la fonction $\Theta(\psi)$ ne devient pas infinie. Mais il faut prouver de plus que $\Theta(\psi)$ est une fonction continue, c'est-à-dire, qui change par degrés insensibles lorsqu'on fait croître ψ d'une manière semblable, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$. Cette propriété a lieu quand même la fonction $F(\gamma)$ qui entre dans la composition de $\Theta(\psi)$, serait discontinue c'est-à-dire quand même la courbe dont γ est l'abscisse et $F(\gamma)$ l'ordonnée, serait composée de parties discontigues. Il est toujours bien entendu que $F(\gamma)$ doit rester finie, condition qui est évidemment remplie dès qu'elle a lieu pour la fonction $f(\theta', \varphi')$ dont $F(\gamma)$ dérive. La même propriété appartient aussi à $\Pi(\psi)$, mais il n'était pas nécessaire d'y avoir égard dans l'examen que nous avons fait de T.

Pour prouver la propriété énoncée, il suffit évidemment de faire voir que cette propriété convient à chacune des intégrales que renferme $\Theta(\psi)$. Si l'on suppose que dans la seconde de ces deux intégrales, ψ augmente de la quantité positive ε, l'intégrale augmentera de

$$\int_0^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon))]}} - \int_0^{\psi} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}.$$

Cette différence peut être mise sous cette forme

$$-\int_0^{\psi} F(\gamma)\left[\frac{\sin\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}} - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon))]}}\right]\partial\gamma$$
$$+\int_{\psi}^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon))]}}.$$

Comme le facteur de $F(\gamma)$ dans la première de ces deux intégrales, reste évidemment toujours positif entre les limites de l'intégration, il est évident que l'intégrale est moindre, abstraction faite du signe, que l'intégrale de ce facteur pris entre les mêmes limites, multipliée par la plus grande valeur de $F(\gamma)$, que nous désignerons par M comme plus haut.

L'intégration étant effectuée, on trouve pour la quantité que la valeur numérique de l'intégrale ne saurait surpasser

$$2M\left[\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\psi-\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\psi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}\right].$$

On trouve pareillement que la valeur numérique de la seconde intégrale est inférieure à

$$2M\sqrt{\left[\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\psi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]}.$$

Les expressions précédentes s'évanouissent avec ε, il en résulte que l'accroissement de l'intégrale

$$\int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]}}$$

correspondant à une augmentation infiniment petite de la variable ψ est lui même une quantité infiniment petite. Cette intégrale sera donc une fonction continue de ψ.

Le même raisonnement s'appliquant à l'autre intégrale que renferme $\Theta(\psi)$, la continuité de cette fonction se trouve établie.

Il est évident à la seule inspection de l'expression de cette fonction, qu'elle s'évanouit aux deux limites $\psi=0$ et $\psi=\pi$, c'est-à-dire, que l'on a ces deux équations

$$8. \quad \Theta(0)=0, \quad \Theta(\pi)=0.$$

Posons pour abréger $\frac{\partial\Theta(\psi)}{\partial\psi}=\Theta'(\psi)$, et voyons quelle est la valeur de $\Theta'(\psi)$, lorsque ψ obtient la valeur particulière 0. Si l'on désigne pour un instant, par r et s les deux intégrales contenues dans $\Theta(\psi)$, on aura

$$\Theta(\psi)=-r\sin\frac{\psi}{2}+s\cos\frac{\psi}{2},$$

et en différentiant

$$\Theta'(\psi)=-\tfrac{1}{2}r\cos\frac{\psi}{2}-\tfrac{1}{2}s\sin\frac{\psi}{2}-\frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\frac{\psi}{2}+\frac{\partial s}{\partial\psi}\cos\frac{\psi}{2}.$$

Pour $\psi=0$, on a évidemment

$$r=\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\partial\gamma, \quad s=0.$$

Pour déterminer $\frac{\partial s}{\partial\psi}$ dans ce même cas, on remarquera qu'à cause de $s=0$, $\frac{\partial s}{\partial\psi}$ est évidemment la limite du rapport

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)]}},$$

la quantité positive ε décroissant indéfiniment. Ce rapport est compris entre les deux quantités

$$\frac{g}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)]}} \quad \text{et} \quad \frac{h}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{\sin\gamma\,\partial\gamma}{\sqrt{[2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)]}},$$

ou ce qui revient au même, entre celles-ci

$$g\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{et} \quad h\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon},$$

g et h désignant les valeurs extrêmes de $F(\gamma)$ dans l'intervalle de l'intégration. Les expressions précédentes convergeant vers la limite $F(0)$, on

aura $\frac{\partial s}{\partial \psi} = F(0)$, pour la valeur particulière $\psi = 0$. On trouverait d'une manière semblable, la valeur de $\frac{\partial r}{\partial \psi}$ correspondante à $\psi = 0$, valeur dont on n'a toutefois besoin que pour s'assurer qu'elle ne peut pas être infinie. Au moyen des déterminations précédentes, on conclut

$$9. \quad \Theta'(0) = F(0) - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\partial\gamma.$$

Cela posé, reprenons l'expression de U (7.). La suite

$$\sin\psi + 2\sin 2\psi + \ldots + n\sin n\psi,$$

étant mise sous la forme

$$-\frac{\partial}{\partial\psi}(\tfrac{1}{2} + \cos\psi + \cos 2\psi + \ldots + \cos n\psi) = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}.\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi},$$

on aura

$$U = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Theta(\psi)\frac{\partial}{\partial\psi}.\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,\partial\psi.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$U = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Theta'(\psi)\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,\partial\psi,$$

le terme $-\Theta(\psi)\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}$ que cette opération fait sortir du signe, disparaissant. Cela résulte 1° des deux équations (8.) d'après lesquelles $\Theta(\psi)$ s'évanouit aux limites, et 2° de ce que cette fonction $\Theta(\psi)$ reste continue dans toute l'étendue de l'intégration, comme nous l'avons fait voir plus haut.

Sous cette forme il est évident par le théorème déjà cité (Voyez la note à la fin du mémoire) que U converge vers la limite $\Theta'(0)$, ou ce qui revient au même d'après l'équation (8.), vers la limite

$$F(0) - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\partial\gamma.$$

Il est essentiel de remarquer que ce résultat ne cesse pas d'être exact, quand même la fonction $\Theta'(\psi)$ deviendrait infinie pour certaines valeurs particulières de ψ. Quoique $\Theta(\psi)$ conserve toujours une valeur finie, la même propriété ne convient pas toujours à la fonction dérivée $\Theta'(\psi)$. Il serait au contraire facile de s'assurer que $\Theta'(\psi)$ devient nécessairement infinie pour certaines valeurs particulières de la variable ψ, toutes les fois que la fonction $F(\gamma)$, dont $\Theta(\psi)$ dépend, est une fonction discontinue.

Mais, comme on l'a déjà dit, cette circonstance n'empêchera pas le théorème de la note, d'être applicable, la condition que ce théorème exige,

et qui consiste en ce que l'intégrale $\int_0^\psi \Theta'(\psi)\partial\psi = \Theta(\psi)$ doit rester finie, étant évidemment remplie.

En réunissant les résultats qu'on voit d'obtenir, on conclura que la somme $S = T + U$ converge vers la limite $F(0)$ pour des valeurs croissantes de n. Il suit de là que la série (5.), lorsqu'on y suppose $\Theta = 0$, est convergente et a pour somme $F(0)$, et comme l'on a posé plus haut

$$F(\theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\partial\varphi',$$

cette somme sera donnée par l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \varphi')\partial\varphi'$.

§. 4.

Pour passer plus facilement au cas général, où l'on attribue dans la série (5.), à θ et φ des valeurs quelconques, il convient de présenter sous une forme géométrique le résultat auquel on vient de parvenir. Pour cela, concevons une surface sphérique d'un rayon égal à l'unité. Si par un point fixe de cette surface on fait passer un arc de grand cercle, que nous considérons également comme fixe et prolongé d'un seul côté, la position d'un point quelconque de cette surface sera déterminée dès que l'on connaîtra l'arc de grand cercle compris entre ce point et le point fixe, et l'angle sphérique que cet arc forme avec l'arc fixe. Ces deux coordonnées polaires sphériques étant désignées par θ' et φ', on embrassera évidemment la surface entière, en attribuant à θ' toutes les valeurs comprises entre $\theta' = 0$ et $\theta' = \pi$, et à φ' toutes celles comprises entre $\varphi' = 0$ et $\varphi' = 2\pi$, et il est également évident que l'élément de surface relatif à ces coordonnées, sera exprimé par $\sin\theta'\,\partial\theta'\,\partial\varphi'$. La fonction $f(\theta', \varphi')$ étant ainsi donnée pour la surface entière, on voit que l'intégrale

$$F(\theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\partial\varphi'$$

est la moyenne de toutes les valeurs de cette fonction correspondantes aux différents points de la circonférence d'un petit cercle, décrit de l'origine comme centre et avec un rayon sphérique égal à θ'. Si la fonction $f(\theta', \varphi')$ devient indépendante de l'angle φ', lorsqu'on y fait $\theta' = 0$, on aura $F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \varphi')\partial\varphi' = f(0, \varphi')$, et la somme de la série (5.) coïncidera avec la valeur de la fonction relative à l'origine des coordonnées. Mais dans le cas général où la supposition de $\theta' = 0$, ne fait pas disparaître φ', la fonction $f(\theta', \varphi')$ aura une infinité de valeurs différen-

tes à cette origine et sera discontinue dans tous les sens autour de ce point. La somme de la série étant toujours exprimée par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0,\varphi')\,\partial\varphi'$, sera alors la moyenne de toutes ces valeurs en nombre infini. On peut donc dire généralement que la série (5.), lorsqu'on y pose $\theta=0$, a pour somme la moyenne de toutes les valeurs de $f(\theta',\varphi')$ qui ont lieu sur la circonférence d'un cercle infiniment petit et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Pour passer du cas où $\theta=0$, à celui où θ et φ sont quelconques mais inférieures à π et à 2π, on pourrait transporter l'origine au point dont les coordonnées sphériques sont θ et φ. Mais on peut se dispenser de ce calcul, en examinant attentivement le terme général dans l'un et dans l'autre cas.

Dans les deux cas le terme général est exprimé par une intégrale double étendue à toute la surface sphérique, et dont l'élément est le produit de deux facteurs. La premier facteur $f(\theta',\varphi')\sin\theta'\,\partial\theta'\,\partial\varphi'$ qui exprime l'élément de surface multiplié par la valeur de $f(\theta',\varphi')$ qui s'y rapporte, est le même dans les deux cas et il n'y a de différence que pour l'autre facteur P_n. Dans le premier cas, ce facteur P_n est une certaine fonction de la distance sphérique θ' de l'élément de surface à l'origine des coordonnées, et dans le second cas, P_n est la même fonction de γ, γ étant donnée par l'équation

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta'\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi),$$

et comme l'on sait par la trigonométrie, que γ est la distance des deux points ayant pour coordonnées θ, φ, et θ', φ', il est évident que les deux cas ne se distinguent, qu'en ce que l'origine des distances qui coïncide avec celle des coordonnées dans le premier cas, se trouve dans le second au point quelconque (θ,φ). On voit donc que la série est de même nature dans l'un et l'autre cas, et comme on a prouvé la convergence de cette série pour le premier cas, en même temps qu'on en a obtenu la somme, on peut transporter au cas général le résultat trouvé plus haut. On trouve ainsi que la série (5.) est une série convergente, et dont la somme est exprimée par la moyenne de toutes les valeurs de la fonction $f(\theta',\varphi')$, relatives aux différents points du contour d'un cercle infiniment petit dont le centre est au point $(\theta,)$. Cet énoncé embrasse tous le cas.

Lorsque le point (θ, φ) n'est pas du nombre de ceux autour desquels la fonction arbitrairement donnée pour toute l'étendue de la surface sphérique, est discontinue, la moyenne précédente coïncidera avec $f(\theta, \varphi)$, qui est alors la somme de la série (5.), ce qu'il s'agissait de faire voir.

Pour éclaircir cet énoncé par un exemple très-simple, concevons qu'après avoir tracé un polygone sphérique quelconque, on suppose la fonction arbitraire $f(\theta', \varphi')$ égale à l'unité pour tous les points dans l'intérieur du polygone et égale à zéro pour les points extérieurs. Il faudra donc remplacer dans la série (5.), $f(\theta', \varphi')$ par l'unité et n'étendre ensuite la double intégration qu'à la surface du polygone. Les termes de la série étant ainsi complètement déterminés, si l'on substitue dans cette série des valeurs quelconques θ et φ, la valeur correspondante de la série sera l'unité ou zéro, selon que le point dont les coordonnées sont θ, φ, sera situé en dedans ou en dehors du polygone. Dans le cas intermédiaire où le point (θ, φ) appartiendra au contour du polygone, la moyenne de toutes les valeurs de $f(\theta', \varphi')$ correspondantes aux différents points du contour du cercle infiniment petit sera évidemment $\frac{1}{2}$; valeur qui sera donc aussi celle de la série. Mais ce résultat cesse lui même d'être exact, lorsque le point (θ, φ) appartient à la fois à deux parties différentes du contour, c'est-à-dire, lorsque les coordonnées θ, φ sont celles d'un sommet du polygone, et il résulte de l'énoncé général qu'alors la somme de la série est égale à l'angle auquel ce sommet appartient, divisé par quatre droits.

§. 5.

Après avoir prouvé qu'une fonction $f(\theta, \varphi)$, arbitrairement donnée depuis $\theta = 0$, $\varphi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, $\varphi = 2\varphi$, peut être exprimée par une série convergente dont le terme général X_n est une expression rationelle et entière du degré n, des quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, telle que l'équation (c.) soit satisfaite, il nous reste à faire voir que la même fonction n'est susceptible que d'un seul développement de cette espèce. Il suffit pour cela de prouver, que, si Y_m est une expression de même nature que X_n et du degré m, on a toujours*)

$$(d.) \quad \iint X_n Y_m \sin\theta\, \partial\theta\, \partial\varphi = 0,$$

*) Mécanique céleste. Tome II. pag. 31.

les intégrations s'étendant depuis $\theta = 0$, $\varphi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, $\varphi = 2\pi$, et les indices n et m étant supposés différents. Si, après avoir remplacé dans l'intégrale précédente, X_n par les deux termes qui sont équivalents à cette expression en vertu de l'équation (*c.*), on chasse au moyen de l'intégration par parties, les coëfficiens différentiels qui sont ainsi introduits sous le signe, et que l'on ait ensuite égard à l'équation aux différences partielles à laquelle Y_m est supposé satisfaire, il viendra

$$[n(n+1)-m(m+1)]\iint X_n Y_m \sin\theta\,\partial\varphi = 0$$

résultat qui coïncide avec l'équation (*d.*).

Cela posé, si la fonction $f(\theta, \varphi)$, qu'on suppose complètement donnée pour toutes les valeurs de θ et de φ comprises entre $\theta = 0$, $\varphi = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 2\pi$, était susceptible de deux développements différents, on aurait entre ces limites

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots . + Y_n + \ldots . = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n + \ldots .,$$

Z_n désignant une expression de même nature que Y_n. En posant $X_n = Y_n - Z_n$, X_n sera évidemment encore de même nature, et l'on conclut

$$X_0 + X_1 + X_2 + \ldots . + X_n + \ldots . = 0.$$

Cette égalité ayant lieu entre lés limites indiquées, si on l'intègre entre ces mêmes limites après l'avoir multipliée par $X_n \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi$, tous les termes, à l'exception d'un seul, disparaîtront en vertu de l'équation (*d.*), et il viendra

$$\iint X_n^2 \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = 0,$$

d'où il suit qu'on a identiquement $X_n = 0$, ce qu'il s'agissait de prouver.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que la propriété importante qu'on vient de rappeler, n'est pas particulière aux séries dont les termes généraux satisfont à l'équation (*c.*), comme on a paru le croire. Elle convient, au contraire, à tout autre forme de développement propre à exprimer une fonction arbitraire. Les termes d'un pareil développement sont toujours complètement déterminés, lorsque la fonction est donnée dans toute l'étendue de l'intervalle pour lequel elle peut être choisie à volonté. C'est ainsi, par exemple, qu'une fonction $f(x)$ donnée depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, n'est susceptible que d'un seul développement de la forme,

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots . + a_n \sin nx + \text{etc.}$$

et l'on a nécessairement $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, f(x)\,\partial x$.

Comme P_n considéré par rapport aux variables θ, φ, est de même nature que X_n, on aura en vertu de l'équation (*d.*)

$$\iint P_n Y_m \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = 0,$$

n étant toujours supposé différent de m. Soit Y'_m ce que Y_m devient lorsqu'on y remplace θ, φ par θ', φ', l'équation précédente donnera en y mettant θ', φ' à la place de θ, φ, et réciproquement, ce qui ne change rien au coëfficient P_n,

$$\iint P_n Y'_m \sin\theta'\,\partial\theta'\,\partial\varphi' = 0.$$

Cela posé, si l'on suppose que dans l'équation (*a.*), la fonction $f(\theta, \varphi)$ se réduise à Y_m, tous les termes du second membre, à l'inception de celui dont l'indice est m, s'évanouiront en vertu de l'équation précédente et l'on obtient

$$(e.)\qquad Y_m = \frac{2m+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\partial\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}P_m Y'_m\,\partial\varphi',$$

résultat remarquable et qu'on a souvent occasion d'employer.

Addition au mémoire précédent.

On a ces deux théorèmes:

„La fonction $f(\beta)$ restant finie depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = h$, (où „$0 < h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$), l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera vers $\frac{1}{2}\pi f(0)$, si „la quantité positive k devient infinie."

„La fonction $f(\beta)$ restant finie depuis $\beta = g$ jusqu'à $\beta = h$, (où „$0 < g < h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$), l'intégrale $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ s'évanouira pour $k = \infty$."

Ces deux théorèmes dont le premier est celui dont nous avons fait usage dans le mémoire précédent, se démontrent d'une manière très simple lorsqu'on suppose d'abord que la fonction $f(\beta)$ reste continue et toujours croîssante ou toujours décroîssante entre les limites des intégrations *), et l'on passe ensuite au cas général où cette fonction serait discontinue et alternativement croîssante et décroîssante entre ces limites, en décomposant les intégrales en d'autres entre les limites desquelles ni l'une ni l'autre de ces

*) Vol. IV. de ce journal pag. 165.

circonstances n'a plus lieu et dont les valeurs correspondantes à $k=\infty$, résulteront par conséquent immédiatement du premier cas.

Pour que l'analyse par laquelle nous avons déterminé la limite de l'expression U (§. 3.), soit complète, il est essentiel de remarquer que le premier des théorèmes précédents ne cesse pas d'être exact quand même la fonction $f(\beta)$ deviendrait infinie pour une ou pour plusieurs valeurs de β différentes de zéro et comprises entre $\beta=0$ et $\beta=h$, pourvu qu'alors l'intégrale $\int_0^\beta f(\beta)\partial\beta = F(\beta)$ reste finie et continue depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=h$.

Pour nous en assurer, supposons que $f(\beta)$ ne devient infinie que pour $\beta=c$, le même raisonnement s'étendant sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de valeurs. Désignons par ε une quantité positive que nous supposerons invariable tandis que k croît au-delà de toute limite, et décomposons l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ en 4 autres, ayant respectivement pour limites,

$$0 \text{ et } c-\varepsilon,\quad c-\varepsilon \text{ et } c,\quad 0 \text{ et } c+\varepsilon,\quad c+\varepsilon \text{ et } h.$$

La fonction $f(\beta)$ ne devenant pas infinie entre les limites de la première et de la quatrième de ces nouvelles intégrales, ces intégrales deviendront respectivement $\frac{1}{2}\pi f(0)$ et 0, pour $k=\infty$. Quant aux deux autres, on remarquera que la quantité arbitraire ε peut être choisie assez petite pour que $f(\beta)$ conserve toujours le même signe depuis $\beta=c-\varepsilon$ jusqu'à $\beta=c$, et qu'il en soit de même pour l'intervalle compris entre $\beta=c$ et $\beta=c+\varepsilon$, ce dernier signe pouvant d'ailleurs être différent du premier, puisque $f(\beta)$ peut changer de signe en passant par l'infini.

(Cela aurait lieu par exemple si l'on avait $f(\beta)=-\frac{1}{2\sqrt{(c-\beta)}}$, tant que $\beta<c$, et $f(\beta)=\frac{1}{2\sqrt{(\beta-c)}}$, lorsque $\beta>c$. Dans ce cas, $F(\beta)$ serait $\sqrt{(c-\beta)}-\sqrt{c}$ ou $\sqrt{(\beta-c)}-\sqrt{c}$ selon que $\beta<c$ ou $\beta>c$, et remplirait par conséquent la condition énoncée plus haut, les expressions précédentes étant des fonctions continues de β et coïncidant pour $\beta=c$.)

Cela posé, il est évident que la seconde et la troisième intégrale seront, abstraction fait du signe, et quel que soit k, respectivement inférieures aux quantités

$$\frac{F(c)-F(c-\varepsilon)}{\sin(c-\varepsilon)},\quad \frac{F(c+\varepsilon)-F(c)}{\sin c}.$$

Comme $F(\beta)$ est, par hypothèse, une fonction continue de β, et comme c diffère de zéro et de tout autre multiple de π, (puisqu'on a $c < \frac{1}{2}\pi$) on voit que les valeurs précédentes peuvent devenir moindres que toute grandeur donnée, en choisissant ε suffisamment petit.

Mais on a vu d'un autre côté, que, quelque petit que l'on suppose la quantité invariable ε, la somme des deux autres intégrales convergera toujours pour des valeurs croissantes de k, vers la limite $\frac{1}{2}\pi f(0)$, limite qui sera donc aussi celle de l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\partial\beta$, pour $k=\infty$, ce qu'il s'agissait de prouver.

8.

Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies.

Lu à l'Académie des sciences de Berlin le 25. Juin 1835.

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

(Extrait.)

Parmi les conséquences nombreuses et inattendues que Mr. *Gaufs* a tirées de sa belle théorie des équations binomes, il y en a une qui présente une singularité très remarquable. La lettre p désignant un nombre premier $4m+1$, et q un nombre premier $4m+3$, il résulte de cette théorie que les deux expressions

$$s = \sum_{i=0}^{i=p-1} \cos\frac{2i^2\pi}{p}, \quad \text{et} \quad t = \sum_{i=0}^{i=q-1} \sin\frac{2i^2\pi}{q}$$

sont données par ces deux équations du second degré $s^2 = p$, $t^2 = q$. On conclut de là $s = \pm\sqrt{p}$, $t = \pm\sqrt{q}$, où il ne s'agit plus que de fixer le signe qui doit être unique dans l'un et l'autre cas, les sommes précédentes étant complètement déterminées. En attribuant des valeurs particulières aux nombres p et q, on trouve toujours que c'est le signe supérieur qui doit avoir lieu, mais il est très difficile de prouver la généralité de ce résultat indiqué par l'induction. Dans ses „*Disquisitiones arithmeticae*" Mr. *Gaufs* ne s'était pas attaché à lever cette difficulté singulière, mais il y est revenu dans un mémoire particulier *) que les géomètres regardent comme une des plus belles productions de ce profond analyste. La méthode dont il y fait usage, consiste à transformer les sommes précédentes, ou plutôt les expressions plus générales qui s'en déduisent, en y remplaçant les nombres premiers p et q par un entier quelconque n, en produits de sinus d'arcs équidifférents, produits qui sont très faciles à évaluer et qui ne présentent plus aucune ambiguité de signe. La difficulté de se rendre bien compte, à quoi tient le succès des considérations délicates par lesquelles l'illustre auteur opère cette ingénieuse transformation m'ayant fait rechercher, si on ne pourrait pas résoudre la même question sans y re-

---

*) Summatio quarundam serierum singularium. Comment. recent. societ. Gotting. Tom. I.

courir, je suis parvenu au théorème suivant qui comprend les sommations précédentes.

„La somme de la série finie ou infinie

$$F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos\alpha + c_2 \cos 2\alpha + \ldots .$$

étant connue, on peut toujours exprimer au moyen de la fonction $F(\alpha)$, les nouvelles séries

$$c_0 + c_1 \cos 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \cos 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots .$$

$$c_1 \sin 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \sin 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots ,$$

qui ont les mêmes coëfficients que la précédente."

Je me flatte que cette nouvelle manière de parvenir aux résultats si remarquables de Mr. *Gaufs* pourra avoir quelque interêt, l'histoire de la théorie des nombres nous montrant par de nombreux exemples, que c'est surtout dans cette partie de la science qu'il y a de l'avantage à envisager la même question sous des points de vue très différents. La méthode de Mr. *Gaufs* était jusqu'à présent le seul moyen de vaincre la difficulté indiquée et qui consiste dans l'ambiguité du signe. Celle que Mr. *Libri* a donnée, quoique très ingénieuse, ne paraît pas propre à résoudre cette difficulté puisqu'elle fait dépendre les sommes cherchées d'une équation du second degré. Pour faire disparaître l'ambiguité que cette circonstance fait naître *), le savant auteur a recours à l'expression transformée en produit, sans indiquer aucun moyen de parvenir à cette transformée. Mais ce passage de la somme au produit est à lui seul la question tout entière, puisqu'une fois effectué, il dispense de toute autre analyse, l'expression en produit étant du nombre de ceux qu'*Euler* a déterminés depuis longtemps par les considérations les plus simples.

§. 1.

L'analyse dont nous ferons usage, repose sur ces deux théorèmes.

„La constante c remplissant la double condition $0 < c \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\pi$, et la fonction $f(\beta)$ étant continue depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = c$, l'intégrale $\int_c^c \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$ convergera vers la limite $\frac{1}{2}\pi f(0)$ pour des valeurs indéfiniment croissantes de l'entier positif k."

*) Voyez le tome IX de ce Journal, pag. 187.

„Les constantes b et c étant telles qu'on ait $0 < b < c \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\pi$, et la fonction $f(\beta)$ étant supposée continue depuis $\beta = b$ jusqu'à $\beta = c$, l'intégrale $\int_b^c \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$ convergera dans la même circonstance vers la limite zéro."

Ces théorèmes se démontrent facilement, comme je l'ai fait voir dans un précédent mémoire *), lorsqu'on suppose d'abord la fonction $f(\beta)$ toujours croissante, ou toujours décroissante entre les limites de l'intégration. Pour passer ensuite au cas général où cette fonction présente plusieurs maxima et minima entre ces limites, il suffit de décomposer les intégrales en d'autres entre les limites desquelles la fonction $f(\beta)$ n'est plus alternativement croissante et décroissante.

Au moyen de ces théorèmes on détermine facilement la limite vers laquelle converge l'intégrale,

$$\int_0^a \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta,$$

a désignant une constante positive quelconque, et la fonction $f(\beta)$ étant continue depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = a$. Soit $l\pi$ le plus grand multiple de π contenu dans a, l'intégrale précédente sera la somme de celles-ci

$$\int_0^{l\pi} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta,\quad \int_{l\pi}^a \frac{\sin(2k+1)l}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta.$$

La première étant décomposée en $2l$ autres prises entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ et $2.\frac{1}{2}\pi$, $2.\frac{1}{2}\pi$ et $3.\frac{1}{2}\pi$, ... $(2l-1).\frac{1}{2}\pi$ et $2l.\frac{1}{2}\pi$, si dans ces nouvelles intégrales l'on écrit au lieu de β,

$$\beta,\ \pi-\beta,\ \pi+\beta,\ 2\pi-\beta,\ \ldots,\ l\pi-\beta,$$

et si l'on transforme ensuite les intégrales dont le rang est un nombre pair, d'après la formule $\int_g^h \psi(\beta)\,\partial\beta = -\int_h^g \psi(\beta)\,\partial\beta$, toutes ces intégrales s'étendront depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}\pi$. En les réunissant donc et ayant égard à ce que k est un entier, il viendra

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f(\beta)+f(\pi-\beta)+f(\pi+\beta)+\ldots+f((l-1)\pi+\beta)+f(l\pi-\beta)]\,\frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta,$$

expression qui d'après le premier des théorèmes précédents, convergera pour des valeurs croissantes de k vers cette limite

$$\pi(\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots+\tfrac{1}{2}f(l\pi)).$$

*) Voyez ce Journal tome IV. pag 157 ou le „Repertorium der Physik von *Dove* und *Moser*," où la même démonstration est simplifiée à quelques égards.

La seconde intégrale $\int_{l\pi}^{a}\frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta$ évidemment nulle lorsque $a=l\pi$, devient généralement $\int_{0}^{a-l\pi}\frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}f(l\pi+\beta)\partial\beta$, en y remplaçant β par $l\pi+\beta$. Lorsque $a-l\pi$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}\pi$, il résulte du premier théorème qu'elle converge vers la limite $\frac{1}{2}\pi f(l\pi)$; dans le cas où $a-l\pi$ est compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et π, on décomposera l'intégrale précédente en deux autres prises l'une depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\beta=\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta=a-l\pi$. La première deviendra toujours $\frac{1}{2}\pi f(l\pi)$ pour $k=\infty$, tandis que la seconde qui par le changement de β en $\pi-\beta$, prend la forme
$$\int_{(l+1)\pi-a}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}f((l+1)\pi-\beta)\partial\beta,$$
converge vers la limite zéro en vertu du second théorème.

En réunissant ce qui précède, on voit que l'intégrale
$$\int_{0}^{a}\frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta,$$
lorsque l'entier positif k qu'elle renferme devient infini, prend toujours cette valeur
$$\pi(\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots\ldots+f(l\pi)) = \tfrac{1}{2}\pi f(0)+\pi\sum_{s=1}^{s=l}f(s\pi),$$
$l\pi$ désignant le plus grand multiple de π contenu dans a. Il n'y a d'exception que lorsque a est un multiple exact de π, le dernier terme $\pi f(l\pi)$ devant, dans ce cas, être réduit à la moitié de sa valeur.

§. 2.

Considérons les deux intégrales
$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha^2)\partial\alpha = a,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\alpha^2)\partial\alpha = b\ ^{*}).$$

*) Il n'est peut-être pas inutile de prévenir une difficulté que l'emploi de ces deux intégrales pourrait faire naître. Quelques auteurs ont énoncé qu'une intégrale prise entre des limites infinies devient nécessairement indéterminée, lorsque la fonction sous le signe ne s'évanouit pas à ces deux limites. Les intégrales que nous considérons ne satisfont pas à cette condition et sont néanmoins complètement déterminées, comme on le voit sur le champ en les mettant sous cette autre forme $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\beta}{\sqrt{\beta}}\partial\beta$, $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\beta}{\sqrt{\beta}}\partial\beta$. Il résulte de là que les intégrales $\int\cos\alpha^2\partial\alpha$, $\int\sin\alpha^2\partial\alpha$, prises depuis $\alpha=-p$ jusqu'à $\alpha=p$, convergent l'une et l'autre vers une limite fixe, lorsque la quantité positive p croît indéfiniment, soit que cette augmentation se fasse d'une manière continue, soit qu'elle ait lieu, comme dans ce qui va suivre, par sauts et suivant une loi quelconque. Il n'en serait pas de même pour l'intégrale $\int\cos\alpha\,\partial\alpha$, qu'on suppose quelquefois égale à zéro, et qui est essentiellement indéterminée, du moins tant qu'on la considère en elle même.

Quoiqu'on sache qu'on a $a=\sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}$, $b=\sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}$, nous n'avons pas besoin de supposer connues les valeurs de ces deux constantes qui se présentent d'elles mêmes dans l'analyse que nous allons développer. Si l'on pose dans la première intégrale $\alpha=\beta+g$, β désignant une nouvelle variable et g étant une constante réelle quelconque, il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta+g)^2\,\partial\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta^2+g^2)\cos 2g\beta.\partial\beta$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\beta^2+g^2)\sin 2g\beta.\partial\beta=a.$$

La seconde intégrale étant évidemment nulle, cette équation prendra la forme

$$\cos(g^2)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta-\sin(g^2)\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta=a.$$

On trouve d'une manière toute semblable

$$\sin(g^2)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta+\cos(g^2)\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta=b.$$

En éliminant successivement chacune de ces deux intégrales, on aura ces équations connues:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta=a\cos(g^2)+b\sin(g^2),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\beta^2)\cos 2g\beta.\partial\beta=b\cos(g^2)-a\sin(g^2).$$

Si l'on pose $\beta=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, $g=i\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$, α étant une nouvelle variable, et n et i désignant des constantes positives que l'on considérera comme des entiers dans ce qui va suivre, il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right)\cos i\alpha\,\partial\alpha=2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.\left(a\cos\frac{2i^2\pi}{n}+b\sin\frac{2i^2\pi}{n}\right),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right)\cos i\alpha\,\partial\alpha=2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.\left(b\cos\frac{2i^2\pi}{n}-a\sin\frac{2i^2\pi}{n}\right).$$

Cela posé, soit

$$1.\quad F(\alpha)=c_0+c_1\cos\alpha+c_2\cos 2\alpha+\ldots.=\Sigma c_i\cos i\alpha$$

une série de cosinus finie ou infinie. On suppose seulement que lorsque la série se prolonge à l'infini, elle est convergente et exprime une fonction continue de α. Les équations précédentes étant multipliées par c_i, si l'on somme ensuite entre les mêmes limites que dans l'équation (1.), on aura

$$2.\quad\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\frac{n\alpha^2}{8\pi}F(\alpha)\,\partial\alpha=2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}(aG+bH),\\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{n\alpha^2}{8\pi}F(\alpha)\,\partial\alpha=2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}(bG-aH),\end{cases}$$

où l'on a fait pour abréger

$$3.\quad \Sigma c_i \cos\frac{2i^2\pi}{n} = G,\quad \Sigma c_i \sin\frac{2i^2\pi}{n} = H.$$

Pour obtenir les intégrales précédentes, on les supposera d'abord prises depuis $\alpha = -(4k+1)\pi$, jusqu'à $\alpha = (4k+1)\pi$, k désignant un nombre entier positif quelconque que l'on considérera ensuite comme infini. Chacune de ces deux intégrales étant décomposée en $4k+1$ nouvelles intégrales dont les limites résultent des expressions $(2h-1)\pi$ et $(2h+1)\pi$, en attribuant à h toutes les valeurs entières depuis $h = -2k$ jusqu'à $h = 2k$, si l'on pose ensuite $\beta = 2h\pi + \gamma$ dans chacune de ces nouvelles intégrales, et que l'on observe qu'on a d'après l'équation (1.), $F(2h\pi+\gamma) = F(\gamma)$, il viendra

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \partial\gamma\, F(\gamma)\, \Sigma \cos\frac{n}{8\pi}(\gamma+2h\pi)^2,\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \partial\gamma\, F(\gamma)\, \Sigma \sin\frac{n}{8\pi}(\gamma+2h\pi)^2$$

les sommations s'étendant depuis $h = -2k$ jusqu'à $h = 2k$. En réunissant les termes de la première somme qui correspondent à des valeurs opposées de h, cette somme prendra cette autre forme:

$$\cos\frac{n\gamma^2}{8\pi} + \sum_{h=1}^{h=2k}\left(\cos\frac{n}{8\pi}(\gamma+2h\pi)^2 + \cos\frac{n}{8\pi}(\gamma-2h\pi)^2\right)$$

$$= \cos\frac{n\gamma^2}{8\pi} + 2\sum_{h=1}^{h=2k} \cos\frac{n}{8\pi}(\gamma^2+4h^2\pi^2)\cos\frac{hn\gamma}{2}.$$

Le facteur $\cos\frac{n}{8\pi}(\gamma^2+4h^2\pi^2) = \cos\left(\frac{n\gamma^2}{8\pi} + nh^2\tfrac{1}{2}\pi\right)$ n'a évidemment que deux valeurs différentes, et ce facteur est $\cos\left(\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)$ ou $\cos\left(\frac{n\gamma^2}{8\pi} + \frac{n\pi}{2}\right)$ selon que h est pair ou impair, puisque h^2, dans le premier cas, a la forme 4μ et, dans le second, celle-ci $4\mu+1$. Il viendra donc en réunissant séparément les termes pour lesquels h est pair et ceux où h est impair,

$$\cos\frac{n\gamma^2}{8\pi}(1 + 2\cos n\gamma + 2\cos 2n\gamma + \ldots + 2\cos kn\gamma)$$

$$+\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)[2\cos\tfrac{1}{2}n\gamma + 2\cos 3(\tfrac{1}{2}n\gamma) + \ldots + 2\cos(2k-1)(\tfrac{1}{2}n\gamma)].$$

En substituant pour ces deux séries les expressions connues

$$\frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma},\quad \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma} - \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma},$$

il viendra

$$\frac{\sin(4k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi}\right) + \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\left[\cos\frac{n\gamma^2}{8\pi} - \cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)\right].$$

La somme que la seconde intégrale renferme, est pareillement,

$$\frac{\sin(4k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)+\frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\left[\sin\frac{n\gamma^2}{8\pi}-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)\right].$$

Ces expressions ayant la même valeur pour γ et pour $-\gamma$, et la même circonstance ayant lieu pour $F(\gamma)$ en vertu de l'équation (1.), il est permis de n'étendre les intégrations que depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\pi$, et de doubler les résultats. On trouve ainsi ces deux expressions

$$2\int_0^\pi \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)F(\gamma)\,\partial\gamma$$

$$+2\int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\left[\cos\frac{n\gamma^2}{8\pi}-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)\right]F(\gamma)\,\partial\gamma,$$

$$2\int_0^\pi \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)F(\gamma)\,\partial\gamma$$

$$+2\int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin\frac{1}{2}n\gamma}\left[\sin\frac{n\gamma^2}{8\pi}-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{n\gamma^2}{8\pi}\right)\right]F(\gamma)\,\partial\gamma.$$

Si l'on pose $\frac{1}{4}n\gamma=\beta$ dans la première et dans la troisième intégrale, et $\frac{1}{2}n\gamma=\beta$ dans la seconde et la quatrième, ces expressions prennent la forme

$$\frac{8}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\beta}{\sin\beta}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{2\beta^2}{n\pi}\right)F\left(\frac{4\beta}{n}\right)\partial\beta$$

$$+\frac{4}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}\left[\cos\frac{\beta^2}{2n\pi}-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{\beta^2}{2n\pi}\right)\right]F\left(\frac{2\beta}{n}\right)\partial\beta,$$

$$\frac{8}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\beta}{\sin\beta}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{2\beta^2}{n\pi}\right)F\left(\frac{4\beta}{n}\right)\partial\beta$$

$$+\frac{4}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin\beta}\left[\sin\frac{\beta^2}{2n\pi}-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi+\frac{\beta^2}{2n\pi}\right)\right]F\left(\frac{2\beta}{n}\right)\partial\beta.$$

Les limites de ces expressions correspondantes à $k=\infty$, résultent immédiatement du théorème énoncé à la fin du premier §.; en substituant ces valeurs dans les équations (2.), et multipliant par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, il viendra

$$aG+bH=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}\right)F(0)+4\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\Sigma\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{2s^2\pi}{n}\right)F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$$

$$+2\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\Sigma\left[\cos\frac{s^2\pi}{2n}-\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{s^2\pi}{2n}\right)\right]F\left(\frac{2s\pi}{n}\right),$$

$$bG-aH=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\sin\frac{n\pi}{2}F(0)+4\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\Sigma\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{2s^2\pi}{n}\right)F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$$

$$+2\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.\Sigma\left[\sin\frac{s^2\pi}{2n}-\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{s^2\pi}{2n}\right)\right]F\left(\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Dans chacune de ces deux équations la première somme s'étend depuis $s=1$, jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{4}n$, la seconde depuis $s=1$, jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{3}{4}n$, le dernier terme de la seconde somme devant être réduit à moitié lorsque $\frac{3}{4}n$ est un nombre entier, et la même chose ayant lieu pour la première lorsque $\frac{1}{4}n$ est aussi un entier.

Pour déduire de ces équations les sommations dont il a été question dans le préambule de ce mémoire, supposons la série (1.) composée de n termes et tous ses coëfficiens égaux à l'unité. On aura alors

$$F(\alpha)=1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots.+\cos(n-1)\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

et la fonction $F\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ sera évidemment nulle, lorsque i est un nombre entier *non-divisible* par n. Il résulte de là, en ayant égard aux limites des sommations précédentes, que tous leurs termes disparaissent, et comme on a aussi $F(0)=n$, il viendra simplement

$$aG+bH=\sqrt{(\tfrac{1}{2}n\pi)}(1+\cos\tfrac{1}{2}n\pi),\quad bG-aH=\sqrt{(\tfrac{1}{2}n\pi)}\sin\tfrac{1}{2}n\pi.$$

Pour déterminer les deux quantités a et b, indépendantes de n, il suffira de donner à n une valeur particulière. Posant par exemple $n=1$, on aura $G=1$, $H=0$, et les équations précédentes deviendront $a=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$, $b=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. On a donc généralement, quel que soit n,

$$G+H=(1+\cos\tfrac{1}{2}n\pi)\sqrt{n},\quad G-H=\sin\tfrac{1}{2}n\pi.\sqrt{n},$$

et par conséquent

$$G=\tfrac{1}{2}(1+\cos\tfrac{1}{2}n\pi+\sin\tfrac{1}{2}n\pi)\sqrt{n},\quad H=\tfrac{1}{2}(1+\cos\tfrac{1}{2}n\pi-\sin\tfrac{1}{2}n\pi)\sqrt{n}.$$

En attribuant successivement à n, ces 4 formes 4μ, $4\mu+1$, $4\mu+2$, $4\mu+3$, et remettant pour G et H les séries que ces lettres représentent d'après les équations (3.), on aura

$$\Sigma\cos\frac{2i^2\pi}{n}=\sqrt{n},\quad \Sigma\sin\frac{2i^2\pi}{n}=\sqrt{n},\quad n=4\mu,$$

$$\Sigma\cos\frac{2i^2\pi}{n}=\sqrt{n},\quad \Sigma\sin\frac{2i^2\pi}{n}=0,\quad n=4\mu+1,$$

$$\Sigma\cos\frac{2i^2\pi}{n}=0,\quad \Sigma\sin\frac{2i^2\pi}{n}=0,\quad n=4\mu+2,$$

$$\Sigma\cos\frac{2i^2\pi}{2}=0,\quad \Sigma\sin\frac{2i^2\pi}{n}=\sqrt{n},\quad n=4\mu+3,$$

les sommations s'étendant depuis $i=0$ jusqu'à $i=n-1$.

§. 3.

Je ne terminerai pas cet extrait, sans avoir rappelé les considérations extrêmement simples par lesquelles Mr. *Gauss* dans le Mémoire déjà cité, a déduit des expressions précédentes, la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers impairs quelconques.

Le nombre premier impair p étant considéré comme diviseur, le reste provenant d'un carré quelconque non-divisible par p, sera évidemment compris parmi ceux que donne la série $1^2, 2^2, 3^2, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$; et l'on prouve facilement que ces restes que je désignerai par

$$\text{I.} \quad a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots, \; a_{\frac{p-1}{2}},$$

pris dans un ordre quelconque, sont tous différents entre eux. Soient encore

$$\text{II.} \quad b_1, \; b_2, \; \ldots\ldots\ldots, \; b_{\frac{p-1}{2}},$$

ceux des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$, que la série (I.) ne renferme pas. Cela posé, le nombre quelconque q non-divisible par p, est dit résidu ou non-résidu quadratique par rapport au diviseur p, selon que le reste de q appartient à la série (I.) ou à la série (II.), et l'on s'assure facilement que les restes de $1^2.q, 2^2.q, 3^2.q, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 q$, abstraction faite de l'ordre, coïncident avec (I.) ou (II.), selon que le premier ou le second de ces deux cas a lieu *).

Considérons la somme $\sum\limits_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}$, dans laquelle e désigne à l'ordinaire la base des logarithmes népériens. Comme p est impair, il résulte des expressions du §. précédent que cette somme est $\sqrt{p}$ ou $\sqrt{p}.\sqrt{-1}$ selon que p a la forme $4\mu+1$ ou celle-ci $4\mu+3$. Cette double valeur étant donnée par la formule unique $\sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$, on aura

$$\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

Si l'on met à part le premier terme et que l'on réunisse deux à deux les termes correspondants à s et à $p-s$, en ayant égard à l'équation évidente $e^{s^2.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = e^{(p-s)^2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}$, il viendra

$$1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{s^2.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

*) Disquisitiones arithmeticae. Sect. IV.

ou ce qui revient au même, en rejetant les multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant,

$$1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

On a pareillement

$$P = \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2.\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = 1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{s^2.\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

et comme les restes de la série $1^2.q$, $2^2.q$, $3^2.q$, ... $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.q$, coïncident avec (I.) ou (II.), selon que q est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p, on a respectivement dans ces deux cas, en négligeant toujours les multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant,

$$P = 1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad P = 1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{b_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

expressions dont la seconde en vertu de l'équation évidente,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{b_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \sum_{s=1}^{s=p-1} e^{s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = -1,$$

se change en $P = -1-2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}$. Si donc l'on désigne par δ l'unité prise positivement ou négativement selon que q est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p, on aura l'équation qui comprend les deux cas:

$$\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2.\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = \delta\left(1+2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s.\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) = \delta\sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Si l'on suppose que q est aussi un nombre premier impair, on aura par une simple permutation

$$\sum_{t=0}^{t=q-1} e^{t^2.\frac{2p\pi}{q}\sqrt{-1}} = \varepsilon\sqrt{q}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

où $\varepsilon = +1$ ou $= -1$, selon que p est ou n'est pas résidu quadratique de q. En multipliant les équations précédentes entre elles, il viendra

$$\sum_{t=0}^{t=q-1}\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{(q^2s^2+p^2t^2)\frac{2\pi}{pq}\sqrt{-1}} = \delta\varepsilon\sqrt{(pq)}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

ou ce qui est la même chose, en ajoutant $4st\pi\sqrt{-1}$ à l'exposant,

$$\sum_{t=0}^{t=q-1}\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{(qs+pt)^2\frac{2\pi}{pq}\sqrt{-1}} = \delta\varepsilon\sqrt{(pq)}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

Il est facile de voir qu'entre les limites de la double intégration, $qs+pt$ ne saurait donner deux fois le même reste par rapport au diviseur pq, car si les restes provenants de $qs+pt$ et de $qs'+pt'$, étaient égaux, $q(s-s')+p(t-t')$ serait divisible par pq, ce qui exige, s, s' étant compris entre 0 et $p-1$, et t, t' entre 0 et $q-1$, qu'on ait à la fois $s=s'$, $t=t'$. Ces restes seront donc 0, 1, 2,...., $pq-1$, et l'on pourra les mettre à la place de la série de valeurs fournies par l'expression $qs+pt$, ce changement consistant évidemment à négliger des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant. On aura ainsi

$$\sum_{s=0}^{s=pq-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{pq}\sqrt{-1}} = \delta\varepsilon\sqrt{(pq)}\,(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

ou en remplaçant le premier membre par sa valeur qui résulte des expressions du §. précédent,

$$\sqrt{(pq)}\,(\sqrt{-1})^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2} = \delta\varepsilon\sqrt{(pq)}\,(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

et par conséquent

$$\delta\varepsilon = (\sqrt{-1})^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

et comme l'exposant est équivalent à l'expression

$$\tfrac{1}{2}(p-1)(q-1)+(p-1)(q-1)\left(\frac{(p+1)(q+1)}{4}-1\right),$$

dont le second terme peut être négligé comme étant divisible par 4, il viendra

$$\delta\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Cette équation renferme la loi de réciprocité, car il en résulte qu'on a $\delta=\varepsilon$, lorsque p et q sont l'un et l'autre de la forme $4\mu+1$, ou l'un de la forme $4\mu+1$, l'autre de la forme $4\mu+3$, et qu'au contraire on a $\delta=-\varepsilon$, lorsque p et q ont l'un et l'autre la forme $4\mu+3$.

4.

Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

(Auszug eines Schreibens desselben vom 29. November 1836 an den Herrn Professor *Enke*, Secretair der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

Es ist mir gelungen, eine grofse und wesentliche Lücke in der Variationsrechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Gröfsten und Kleinsten nämlich, welche von der Variationsrechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Gröfstes oder Kleinstes giebt, oder keins von beiden. Man hatte zwar erkannt, dafs die Kriterien hiefür davon abhängen, ob gewisse Systeme Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über den das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden, und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, dafs diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integrirt hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet. Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Functionen erhalten, welche eine Anzahl willkührlicher Constanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkührlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien der Gröfsten und Kleinsten zu integriren hat.

Es sei, um den einfachsten Fall zu betrachten, das vorgelegte Integral $\int f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x$; y wird durch die Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial y} - \partial . \frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{\partial x} = 0$ bestimmt, wo y' für $\frac{\partial y}{\partial x}$ gesetzt ist. Der Ausdruck von y, wie er durch die Integration dieser Gleichung gegeben wird, enthält zwei

willkührliche Constanten, die ich a und b nennen will. Die zweite Variation wird, wenn $w = \delta y$, $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist,

$$\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w w + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w' w' \right) \partial x$$

sein, wo für das Maximum oder Minimum nöthig ist, daſs $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer dasselbe Zeichen behält. Aber um die vollständigen Kriterien des Maximums oder Minimums zu haben, muſs man noch den vollständigen Ausdruck einer Function v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v \right)^2$$

Genüge leistet; wie man dies in *Lagrange's* Functionentheorie, oder in *Dirksen's* Variationsrechnung sehen kann. (Die Variationsrechnung von *Ohm* ist in dieser Theorie nicht genau.) Diesen vollständigen Ausdruck für v finde ich nun wie folgt. Es sei $u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b}$, wo $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ die partiellen Differentialquotienten von y bedeuten, nach den willkührlichen Constanten a, b genommen, die in y vorkommen, und α, β neue willkührliche Constanten sind, so wird

$$v = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{u} . \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

der verlangte Ausdruck von v, welcher eine willkührliche Constante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält.

Schwieriger ist der Fall, wo unter dem Integralzeichen Differentiale höherer Ordnung als die erste vorkommen. Es sei $\int f(x, y, y', y'') \partial x$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wo wieder $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, so wird y das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \partial . \frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{\partial x} + \partial^2 . \frac{\frac{\partial f}{\partial y''}}{\partial x^2} = 0,$$

welches 4 willkührliche Constanten a, a_1, a_2, a_3 enthalten wird. Wenn wieder $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, so wird die zweite Variation:

$$\int \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w w + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w w' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} w w'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w' w' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} w' w''$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} w'' w'' \Big) \partial x.$$

Für das Maximum oder Minimum muſs $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer dasselbe Zeichen haben. Um aber die vollständigen Kriterien zu haben, muſs man folgendes System von Differentialgleichungen integriren, wie man aus *Lagrange's* Theorie der Functionen ersehen kann:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+2v_1\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}+v+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''}+v_1\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+2v_1\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''}+v_2\right)^2.$$

Durch diese 3 Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einen ziemlich abschreckenden Anblick bieten, sind die drei Functionen v, v_1 und v_2 zu bestimmen, deren vollständiger Ausdruck 3 willkührliche Constanten enthalten muſs. Ich habe ihre allgemeinen Integrale, wie folgt, gefunden. Es sei

$$u=\alpha\frac{\partial y}{\partial a}+\alpha_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+\alpha_2\frac{\partial y}{\partial a_2}+\alpha_3\frac{\partial y}{\partial a_3},\quad u_1=\beta\frac{\partial y}{\partial a}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial a_2}+\beta_3\frac{\partial y}{\partial a_3},$$

oder es seien u, u_1 lineäre Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten von y nach den willkührlichen Constanten, die es enthält, genommen. Die 8 Constanten α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3 sind nicht ganz willkührlich zu nehmen, sondern es muſs zwischen den 6 aus ihnen zusammengesetzten Gröſsen $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, $\alpha\beta_2-\alpha_2\beta$, $\alpha\beta_3-\alpha_3\beta$, $\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3$, $\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ eine gewisse Bedingung Statt finden, in deren nähere Erörterung ich hier nicht eingehen will. Hiernach werden die allgemeinen Ausdrücke für v, v_1, v_2, die ich gefunden habe, folgende:

$$v_2=-\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''}-\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{u\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\frac{\partial u}{\partial x}},$$

$$v_1=-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''}+\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\frac{\partial u}{\partial x}},$$

$$v=-\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}-\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\left(u\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(u\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Da zwischen den 6 Gröſsen $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ u. s. w. eine identische Gleichung Statt findet, auſserdem zwischen denselben noch eine Bedingung gegeben ist, und in den Ausdrücken von v, v_1, v_2 nur ihre Verhältnisse

vorkommen, so vertreten sie die Stelle von 3 willkührlichen Constanten, wie verlangt wurde.

Die allgemeine Theorie, wenn unter dem Integralzeichen die Differentiale von y bis auf irgend eine Ordnung vorkommen, wird ohne Schwierigkeit aus einer merkwürdigen Eigenschaft einer besondern Classe lineärer Differentialgleichungen abgeleitet. Diese lineären Differentialgleichungen der $2n$ten Ordnung haben die Form

$$0 = Ay + \frac{\partial . A_1 y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2 y''}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 . A_3 y'''}{\partial x^3} \dots + \frac{\partial^n . A_n y^{(n)}}{\partial x^n} = Y,$$

wo $y^{(m)} = \frac{\partial^m y}{\partial x^m}$ und A, A_1 etc. gegebene Functionen von x sind. Wenn y irgend ein Integral der Gleichung $Y = 0$ ist, und man setzt $u = ty$, so wird der Ausdruck, in welchem $u^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$,

$$y \left(Au + \frac{\partial . A_1 u'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2 u''}{\partial x^2} \dots + \frac{\partial^n . A_n u^{(n)}}{\partial x^n} \right) = yU,$$

integrabel, d. h. man kann sein Integral angeben ohne t zu kennen, und dieses Integral hat wieder die Form von Y, nur dafs n um 1 kleiner geworden; man hat nämlich:

$$\int y U \partial x = Bt' + \frac{\partial . B_1 t''}{\partial x} + \frac{\partial^2 . B_2 t'''}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^{n-1} . B_{n-1} t^{(n)}}{\partial x^{n-1}},$$

wo $t^{(m)} = \frac{\partial^m t}{\partial x^m}$ und die Functionen B sich aus u und den Functionen A und deren Differentialen allgemein angeben lassen. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ohne Schwierigkeit. Ich habe die allgemeinen Ausdrücke der Functionen B gefunden; doch genügt es für die vorgesetzte Anwendung, nur überhaupt zu beweisen, dafs $\int y U \partial x$ die angegebene Form habe, ohne dafs es nöthig ist, die Functionen B selber zu kennen.

Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdruckes zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form $\int V \delta y \, \partial x$ geben, wo $V = 0$ die zu integrirende Gleichung ist. Die zweite Variation erhält hiernach die Form $\int \delta V \, \delta y \, \partial x$. Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so mufs dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V = 0$, welche in δy lineär ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, dafs die Gleichung $\delta V = 0$ bei

dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt, und gewahrt in der That bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Max. oder Min. zu integrirenden Differentialgleichungen. Aufserdem sieht man sogleich, dafs ein Werth von δy, welcher die Differentialgleichung $\delta V = 0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Constanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V = 0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrals δy der Differentialgleichung $\delta V = 0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen linearen Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V = 0$, deren sämmtliche Integrale man auf diese Weise kennt, läfst sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y = 0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittelst der angegebenen Eigenschaften dieser Art Gleichungen gelingt es, die zweite Variation $\int \delta V \, \delta y \, \partial x$ durch fortgesetzte partielle Integration in einen andern Ausdruck zu transformiren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hiebei zu erreichen strebt. Wenn z. B. das obige Integral $\int f(x, y, y', y'') \, \partial x$ vorgelegt ist, und man die für diesen Fall angegebene Bedeutung von u und u_1 beibehält, so erhält δV die Form

$$\delta V = A \delta y + \frac{\partial . A_1 \delta y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2 \delta y''}{\partial x^2},$$

und es wird $\delta V = 0$ für $\delta y = u$. Setzt man $\delta y = u \delta' y$, so erhält man nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$\int \delta V \, \delta y \, \partial x = \int u \, \delta V \, \delta' y \, \partial x =$$

$$\left(B \delta' y' + \frac{\partial . B_1 \delta' y''}{\partial x}\right) \delta' y - \int \left(B \delta' y' + \frac{\partial . B_1 \delta' y''}{\partial x}\right) \delta' y' \, \partial x.$$

Setzt man nun das letzte Integral $\int V_1 \, \delta' y' \partial x$, so wird die Gleichung $V_1 = 0$ erfüllt, wenn man $\delta' y = \frac{u_1}{u}$, also $\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}$ setzt. Man kann daher dieselbe Methode fortsetzen, indem man $\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} . \delta'' y$ setzt, wodurch nach demselben Satze

$$\int V_1 \, \delta' y' \partial x = \int V_1 \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}\right) \delta'' y \, \partial x = C \delta'' y' . \delta'' y - \int C (\delta'' y')^2 \, \partial x,$$

welches die letzte Transformation ist, in welcher die willkürliche Variation nur in einem Quadrat unter dem Integralzeichen vorkommt. Man

sieht übrigens leicht, dafs $B_1 = u^2 A_2$, $C = \left(\frac{u u'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)^2 B_1$, und daher $C = \left(\frac{u u'_1 - u_1 u'}{u}\right)^2 A_2$.

Es ist ferner $A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$, so dafs C immer dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ hat, welches für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein mufs. Man mufs bekanntlich nun noch untersuchen, ob $\partial'' y'$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich werden kann, wozu man durch die Kenntnifs der Functionen u, u_1 in den Stand gesetzt ist, welche man kennt, so wie y gegeben ist oder das vollständige Integral der Gleichung $V = 0$.

Wenn die im Vorstehenden angedeutete Analysis ziemlich tiefe Speculationen der Integralrechnung erfordert, so werden doch die daraus abgeleiteten Kriterien, ob eine Lösung überhaupt ein Maximum oder ein Minimum giebt, sehr einfach. Ich will den Fall betrachten, wo, wenn unter dem Integralzeichen y mit seinen Differentialen bis zum $n$ten vorkommt die Grenzwerthe von $y, y', \dots y^{(n-1)}$, so wie die Grenzen selber gegeben sind. Setzt man in die $2n$ Integralgleichungen, mit ihren $2n$ willkührlichen Constanten, diese Grenzwerthe, so werden die willkührlichen Constanten bestimmt; aber weil hiezu die Auflösung von Gleichungen nöthig ist, giebt es in der Regel mehrere Arten dieser Bestimmung, so dafs man mehrere Curven erhält, welche denselben Grenzbedingungen, und derselben Differentialgleichung Genüge leisten. Hat man eine von diesen gewählt, so betrachte man den einen Grenzpunct als fest, und gehe von ihm zu den folgenden Puncten auf der Curve über. Nimmt man einen dieser folgenden Puncte zum andern Grenzpuncte, so wird es, nach dem eben Gesagten, sich ereignen können, dafs man durch ihn und den ersten noch andere Curven legen kann, für welche in diesen beiden Grenzen $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ dieselben Werthe haben, und welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Sobald man nun, indem man auf der Curve fortschreitet, zu einem Punct derselben gelangt, für welchen eine jener andern Curven mit ihr zusammenfällt, oder, wie man sich auch ausdrükken kann, ihr unendlich nahe kommt: so ist dieses die Grenze, bis zu welcher, oder über welche hinaus, man die Integration nicht ausdehnen darf, wenn ein Maximum oder Minimum Statt finden soll; wenn man aber das integral nicht bis zu diesen Grenzen ausdehnt, so wird ein Maxi-

mum oder Minimum immer Statt finden, vorausgesetzt, dafs $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}$ zwischen den Grenzen immer dasselbe Zeichen hat.

Ich will, um dies an einem Beispiele deutlich zu machen, das Princip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten betrachten.

Das in dem Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral kann nie ein Maximum werden, wie *Lagrange* geglaubt hat: es wird aber auch keinesweges immer ein Minimum, sondern es sind dazu bestimmte Einschränkungen für ihre Grenzen nöthig, welche durch die obige allgemeine Regel gegeben werden, widrigenfalls das Integral weder ein Maximum noch ein Minimum wird. Es fange der Planet (Fig. 1.) sich von a zu bewegen an, wo a zwischen dem Peri- und Aphelium liege; der andere Endpunct sei b; wenn $2A$ die grofse Axe, f die Sonne ist; so erhält man bekanntlich den andern Brennpunct der Ellipse als Durchschnitt zweier aus den Centren a und b mit den Radien $2A - af$, $2A - bf$ beschriebenen Kreise. Die beiden Durchschnittspuncte der Kreise geben zwei verschiedene Lösungen des Problems, welche nur dann in eine zusammenfallen können, wenn die Kreise sich berühren, d. h., wenn ab durch den andern Brennpunct geht. Wenn man also von a durch den andern Brennpunct der Ellipse f' die Sehne der Ellipse aa' zieht, so wird, der gegebenen Regel zufolge, der andere Grenzpunct b zwischen a und a_1 liegen müssen, wenn die Ellipse das im Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral wirklich zu einem Kleinsten machen soll. Fällt b in a_1, so kann die zweite Variation des Integrals zwar nicht negativ werden, aber 0, so dafs die Aenderung des Integrals von der dritten Ordnung und daher sowohl positiv als negativ werden kann. Fällt b über a' hinaus, so kann die zweite Variation auch selbst negativ werden. Wenn der Anfangspunct a zwischen dem Aphelium und Perihelium liegt, so wird der äufserste Punct a' durch die Sehne der Ellipse bestimmt, welche man von a durch die Sonne f zieht. Denn wenn a und a' (Fig. 2.) die Grenzpuncte sind, so erhält man durch Drehung der Ellipse um afa' unendlich viele Lösungen des Problems. Wenn also der zweite Grenzpunct im letztern Falle über a' hinaus liegt, wird es eine *courbe à double courbure* zwischen den beiden gegebenen Grenzen geben, für welche $\int v\partial s$ kleiner wird als für die Ellipse.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch ein Paar Worte über die Variation der Doppel-Integrale sagen, deren Theorie einer gröfsern Eleganz fähig ist, als sie selbst nach den Arbeiten von *Gaufs* und *Poisson* erlangt hat. Um eine Vorstellung von der Art zu geben, wie es mir zweckmäfsig scheint, die Variation der Doppel-Integrale auszudrücken, will ich den einfachsten Fall annehmen, in welchem $\delta\iint f(x, y, z, p, q)\,\partial x\,\partial y$ betrachtet wird, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Es sei w die Variation von z, so wird

$$\delta\iint \partial x . \partial y f = \iint \partial x\,\partial y \left(\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Die bei einfachen Integralen angewendete Methode besteht darin, den Ausdruck unter dem Integralzeichen in zwei Theile zu theilen, von denen der eine in w multiplizirt ist, der andere das Element eines Integrals ist; der erste mufs unter dem Integralzeichen $= 0$ gesetzt werden, wenn die Variation verschwinden soll; der zweite kann integrirt werden, und man läfst sein Integral verschwinden. Eben so theile ich den Ausdruck unter dem Doppelzeichen in einen in w multiplizirten Theil, und in einen andern, der das Element eines Doppel-Integrals ist, das heifst, wenn $u = a w$, so setze ich:

$$\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = A w + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man die in w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ multiplicirten Termen, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = A + \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = a\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -a\frac{\partial v}{\partial x},$$

woraus

$$A = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{\partial y},$$

folgt, welches $= 0$ gesetzt, die bekannte partielle Differentialgleichung giebt, die hier auf eine vollkommen symmetrische Art abgeleitet ist. Die Function v mufs die Gleichung erfüllen: $\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Setzt man $A = 0$, so hat man:

$$\delta\iint \partial x\,\partial y f = \iint \partial x\,\partial y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \iint \partial v\,\partial u,$$

welches, in den gegebenen Grenzen genommen, verschwinden mufs. Wenn z in den Grenzen gegeben ist, wird w und mithin auch $u = a w$, in den

Grenzen verschwinden und daher $\iint \partial u\, \partial v = 0$ sein. Wenn die Grenzwerthe von z ganz willkührlich sind, so muſs v in den Grenzen verschwinden, oder wenn $v = 0$ die Grenzcurve bedeutet, so müssen die im Integral der Gleichung $A = 0$ vorkommenden willkührlichen Functionen so bestimmt werden, daſs $\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ist, u. s. w.

Um auf das Maximum und Minimum zurückzukommen: so ist es ein Übelstand, daſs im Gebrauch dieser Worte solche Verwirrung herrscht. Man sagt, ein Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum, wenn man bloſs sagen will, daſs seine Variation verschwindet, selbst wenn auch weder ein Maximum noch ein Minimum Statt findet. Man sagt, eine Gröſse sei ein Maximum, wenn man nur sagen will, sie sei kein Minimum. So sagt *Poisson* in seiner Mechanik: bei geschlossenen Flächen könne die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Puncten ein Maximum sein, obgleich es sich von selbst versteht, daſs man durch Ausbiegungen, die unendlich klein sein können, einen noch so groſsen Weg noch gröſser machen kann. Freilich giebt die kürzeste Linie nur dann ein relatives Minimum, wenn die nach meiner obigen allgemeinen Regel gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich daſs es zwischen den beiden Endpuncten auf der Curve nicht zwei andere giebt, zwischen denen man noch eine zweite unendlich nahe kürzeste Curve ziehen kann. Im andern Falle ist aber die Länge kein Maximum, sondern weder ein Maximum noch ein Minimum. Für die Flächen, die in jedem Puncte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen, daſs zwischen je zwei ihrer Puncte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.

Die oben angedeuteten Untersuchungen über die Kriterien des Gröſsten und Kleinsten in den isoperimetrischen Problemen füllen eine wesentliche Lücke in einem der schönsten Theile der Mathematik aus; auſserdem sind sie durch die Kunstgriffe der Integralrechnung, die dabei angewendet werden, merkwürdig. Tiefer aber in das Ganze der Wissenschaft eingreifend dürften folgende Untersuchungen sein, von denen ich mir Ihnen eine kurze Andeutung zu geben erlaube.

Hamilton hat gezeigt, daſs die Probleme der Mechanik, bei denen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lassen. Er fordert eigentlich die Integration zweier solcher partiellen Differentialglei-

chungen: man zeigt aber leicht, daſs es genügt, irgend ein vollständiges Integral einer von ihnen zu kennen. Auch dehnt man seine Resultate leicht mit auf den Fall aus, wo die Kräftefunction, d. i. die Function, deren partielle Differentialquotienten die Kräfte geben, die Zeit explicite enthält; für welchen Fall der Satz von der lebendigen Kraft nicht gilt; aber immer noch das Princip der kleinsten Wirkung. Durch diese Zurückführung auf eine partielle Differentialgleichung könnte wenig gewonnen scheinen, da nach der *Pfaff*'schen Methode in den Abhandlungen Ihrer Academie — und für mehr als 3 Variabeln kannte man bisher weiter nichts über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung — die Integration der einen partiellen Differentialgleichung, auf welche das dynamische Problem zurückgeführt wird, viel schwieriger ist als die Integration des Systems der unmittelbar gegebenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung. In der That, wenn man, wie es ebenfalls ohne Schwierigkeit geschieht, die Untersuchung *Hamiltons* auf alle partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnt, ist es umgekehrt eine bedeutende Entdeckung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, daſs sie so immer auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden können, welche bisher nach der *Pfaff*'schen Methode nicht ausreichend war. Wichtig für die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik selber, konnte dies nur werden, wenn man nachwieſs, daſs die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf welche die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zurückkommen, einer besondern Behandlungsweise fähig sind, welche sie von andern Differentialgleichungen unterscheidet. *Hamilton*, obgleich er manche Anwendung seiner neuen Methode, wie er seine Untersuchungen nennt, zu machen versucht hat, hat hiervon nichts bemerkt, und daher auch aus seinen merkwürdigen Theoremen keinen wesentlichen Nutzen gezogen. Aber in der That hat schon *Lagrange* für die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zwischen drei Variabeln, auf die er sich beschränkt hat, und deren Integration zu seinen schönsten und berühmtesten Entdeckungen gehört, bemerkt, daſs, wenn man ein Integral des Systems von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zwischen 4 Variabeln, auf welchen er das Problem zurückgeführt hat, kennt, nur noch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, jede zwischen zwei Variabeln zu integriren sind. Im Allgemeinen

aber wäre noch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen 2 Variabeln zu integriren, die man also für jenes besondere System gewöhnlicher Differentialgleichungen immer auf die 1ste Ordnung zurückführen kann. Wenn die partielle Differentialgleichung 1ster Ordnung zwischen 3 Variabeln die unbekannte Function nicht selber, sondern nur ihre beiden Differentialquotienten enthält; so hat man nur 2 Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3 Variabeln zu integriren; und kennt man ein Integral derselben, so hat man nach der *Lagrange*schen Methode nur noch zwei Quadraturen auszuführen, während im Allgemeinen noch eine Differentialgleichung 1ster Ordnung zu integriren wäre. Der letzte Fall findet in der Mechanik Statt, d. h. die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung, auf welche die dynamischen Probleme zurückkommen, enthalten nie die unbekannte Function selber. Hiernach kann man schon aus dem *Lagrange*schen Verfahren für 3 Variabeln neue, höchst merkwürdige Sätze der Mechanik ziehn. Es folgt nämlich daraus ganz allgemein, daſs, wenn irgend ein Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, von einer Differentialgleichung der 2ten Ordnung abhängt, und man noch auſser diesem Satz ein Integral kennt so daſs das Problem auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1ster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, man diese letzteren immer integriren kann, d. h. man kann nach einer allgemeinen, ganz bestimmten Regel den Multiplicator derselben finden. Ein solches mechanisches Problem ist z. B. die Bewegung eines Körpers in der Ebene, der nach zwei festen Centren gezogen wird. *Euler* fand hier mit Leichtigkeit auſser dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein zweites; die Differentialgleichung erster Ordnung, worauf er hiernach kam, war aber so complicirt, daſs seine ganze Unerschrockenheit dazu gehörte, sich mit der Integration derselben zu beschäftigen und das Gelingen dieser Bemühung zu seinen berühmtesten Meisterstücken gehört. Diese Integration aber würde ohne alle weiteren Kunstgriffe durch die erwähnte allgemeine Regel geleistet. Ich habe vor etwa einem halben Jahre die auf den Fall der freien Bewegung eines Punctes in einer Ebene bezüglichen Formeln, welche allgemein, wenn man auſser dem Integral der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral kennt, das Problem auf Quadraturen zurückführen, der Pariser Akademie mitgetheilt. Diese Formeln lassen sich sogleich auch auf die Bewegung eines Punctes auf einer gegebenen Fläche ausdehnen.

Damit aber eine Anwendung dieser Betrachtungen auf complicirtere mechanische Probleme möglich sei, ist es nöthig, die *Lagrange*sche Methode für die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3 Variabeln auf jede Zahl Variabeln auszudehnen. *Pfaff*, der dies mit unübersteiglichen Hindernissen verknüpft hielt, sah sich aus diesem Grunde genöthigt, diese Methode ganz zu verlassen. Er betrachtete das Problem als speciellen Fall eines viel allgemeinern, dessen glückliche Lösung zu den wichtigsten Bereicherungen der Integralrechnung gehört. Aber das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat vor dem allgemeinen Probleme, welches *Pfaff* betrachtet, Erleichterungen voraus, die ihm entgangen sind, und die er auf seinem Wege nicht finden konnte. Es ist mir gelungen, die Schwierigkeiten, welche der Verallgemeinerung der *Lagrange*schen Methode im Wege standen, zu heben und hiedurch eine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für jede Zahl Variabeln zu begründen, welche für die Integration derselben die wesentlichsten Vortheile darbietet und unmittelbar auf die Probleme der Mechanik ihre Anwendung findet. Hier mögen folgende Andeutungen genügen.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die isoperimetrischen Probleme, in welchen die Differentialquotienten der unbekannten Functionen unter dem Integralzeichen nur bis auf die erste Ordnung steigen, hängen von derselben Analysis ab, so daſs jedes solche isoperimetrische Problem auch als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefaſst werden kann. Man kann unter diesen isoperimetrischen Problemen auch diejenigen begreifen, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum werden, oder allgemeiner, dessen Variation verschwinden soll, nicht unmittelbar als Integral, sondern durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben ist. Umgekehrt kann man auch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als solches isoperimetrische Problem fassen. Zufolge des Princips der kleinsten Wirkung kann als ein isoperimetrisches Problem der genannten Art die Bewegung eines Systemes sich gegenseitig anziehender Körper betrachtet werden, welche auſserdem noch von constanten Parallelkräften und von Kräften sollicitirt werden können, welche nach festen oder beweglichen Centren gerichtet sind, wofern die Körper des Systems auf die letztern Centra nicht reagiren und die Bewegung derselben als an-

derweitig bekannt vorausgesetzt wird. Solches mechanische Problem kann daher auch immer als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefafst werden. Diese Integration hängt von der eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ab, welche mit den bekannten Differentialgleichungen der Mechanik übereinkommen, aber, als auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich, besonderer Erleichterungen fähig sind. Man kann nämlich bei denselben durch einen besondern Gang des Verfahrens, und durch besondere Wahl der Gröfsen, die man als Variabeln einführt, bewirken, dafs jedes gefundene Integral die Stelle von zwei Integrationen vertritt. Um dies deutlicher zu machen, will ich sagen, dafs ein System Differentialgleichungen von der $n$ten Ordnung sei, wenn man dasselbe nach Elimination der übrigen Variabeln auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung zwischen 2 Variabeln bringen kann. Für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche nicht die unbekannte Function selber, sondern nur ihre partiellen Differentialquotienten enthalten, so wie für die isoperimetrischen Probleme der genannten Art, in welchen der Ausdruck, dessen erste Variation verschwinden soll, als Integral gegeben ist, und daher auch für die genannten mechanischen Probleme, läfst sich nun der zu befolgende Gang der Operationen und der dadurch gewonnene Vortheil wie folgt angeben. Es sei das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, von dem das Problem abhängt, von der $2n$ten Ordnung; man kenne ein Integral derselben, so läfst sich das Problem durch eine bestimmte Wahl von Gröfsen, die man als Variabeln einführt, auf ein System von Differentialgleichungen der $n-2$ten Ordnung bringen. Kennt man von diesem Systeme wieder ein Integral, so läfst sich dasselbe durch eine neue Wahl von Variabeln auf ein System von der $2n-4$ten Ordnung bringen, und so fort, bis man keine Differentialgleichungen mehr zu integriren hat. Alle aufserdem noch auszuführenden Operationen bestehen lediglich in Quadraturen. Ich bemerke der Deutlichkeit wegen, dafs ich ein Integral eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Gleichung $U = a$ nenne, wo a eine willkührliche Constante ist, welche in U nicht vorkommt, und U ein solcher Ausdruck, dafs durch die Differentialgleichungen dU identisch Null wird.

Als Beispiel der allgemeinen Methode nehme ich ein mechanisches Problem, von dem ich bereits in einem frühern Schreiben die Akademie

zu unterhalten die Ehre hatte. Es giebt nämlich Fälle bei der Bewegung der Himmelskörper, wie z. B. des Mondes, oder eines Cometen, der dem Jupiter nahe vorbeigehet, in welchen die elliptische Bewegung so wenig angenähert ist, dafs man zur Integration der Differentialgleichungen der Bewegung darauf kein Annäherungsverfahren gründen kann, welches wissenschaftlichen Werth hat. Es ist daher von grofser Wichtigkeit, andere Bewegungen zu erfinden, welche einer einfachen Behandlung fähig sind und dem Fall der Natur sich mehr annähern können. Hiezu könnte man versuchen, die Bewegung eines masselosen Punctes zu wählen, der von zwei Körpern angezogen wird, die sich gleichförmig und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunct drehen. Beim Monde kann man für das Näherungsproblem noch annehmen, dafs die 3 Körper sich in einer Ebene bewegen. Man hat dann zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welche, da die Kräfte die Zeit explicite enthalten, und daher weder der Satz von den Flächen, noch der Satz von der lebendigen Kraft gilt, die Stelle einer Differentialgleichung der vierten Ordnung zwischen 2 Variabeln vertreten. Obgleich die beiden Sätze von den Flächen und der lebendigen Kraft nicht gelten, so habe ich doch gezeigt, dafs eine gewisse Combination derselben auch hier Statt findet. Dieses von mir gefundene Integral führt aber das Problem nicht blofs auf die dritte Ordnung zurück, sondern die Anwendung der allgemeinen Methode auf diesen Fall zeigt, dafs man durch zweckmäfsige Wahl der Variabeln das Problem auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen 2 Variabeln zurückführen kann, von welcher man, wie nach derselben Methode erhellt, wieder nur ein einziges Integral zu kennen braucht. Es ist also vermittelst dieser Methode durch das eine von mir gefundene Integral die Integration der Differentialgleichung 4ter Ordnung darauf zurückgeführt ein einziges Integral einer Differentialgleichung der 2ten Ordnung zu finden, indem alles übrige nur noch Quadraturen erfordert.

Der ganze Gang der angedeuteten Operationen hängt von den jedesmaligen Integralen ab, welche sich entdecken lassen; die Wahl der Variabeln hängt ebenfalls von denselben ab und erfordert auch ihrerseits Integration von Differentialgleichungen, immer aber so, dafs durch ein gefundenes Integral das System Differentialgleichungen auf andere zurückgeführt wird, deren Ordnung um 2 niedriger ist; auch werden sich die zur Bestimmung der Wahl der Variabeln aufzustellenden Differentialgleichun-

gen in vielen Fällen leicht integriren lassen. Wofern man nur die einfachen Integrale, die sich finden lassen, nicht übersieht, kann man auf dem genannten Wege sicher sein, das Problem, wenn nicht gänzlich auf Quadraturen, doch so weit zurückzuführen, als es seiner Natur nach möglich ist. Auch wenn die Differentialgleichungen, auf welche man kommt, sich nicht integriren lassen, wird man doch merkwürdige Eigenschaften derselben erkennen, welche sich vortheilhaft benutzen lassen. So weifs man in dem angeführten Problem, wenn man auch die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, auf welche dasselbe zurückkommt, nicht integriren kann, dafs ihre beiden Integrale, eins aus dem andern durch blofse Quadraturen gefunden werden können.

Sie sehen, hochgeehrtester Herr Professor, dafs die in vorstehenden kurzen Umrissen angedeuteten Resultate ein neues wichtiges Capitel der analytischen Mechanik begründen, die Vortheile betreffend, welche man aus der besonderen Form der Differentialgleichungen der Mechanik für ihre Integration ziehen kann. Wir verdanken *Lagrange* diese Form, aber sie hat bis jetzt in seinen und in den Händen der ihm nachfolgenden Analysten nur dazu gedient, die analytischen Transformationen rascher und übersichtlicher zu leisten, und den bekannten allgemeinen mechanischen Gesetzen die Ausdehnung zu geben, deren sie fähig sind. Aber diese Form erhält jetzt eine viel wichtigere Bedeutung, indem sich zeigt, dafs gerade die Differentialgleichungen von dieser bestimmten Form einer eigenthümlichen Behandlung fähig sind, welche die Schwierigkeiten ihrer Integration bedeutend vermindert.

Den 29. November 1836.

5.

Maximum und Minimum des Bogens einer beliebigen Curve im Verhältnifs zur zugehörigen Abscisse oder Ordinate.

(Vom Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 23. Januar d. J. in der hiesigen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)

---

1. **Die nachstehenden Resultate gründen sich auf den folgenden**

Fundamentalsatz.

„*Wenn die Ordinate* y *in irgend einem Puncte* C *einer beliebigen, algebraischen oder transcendenten Curve* BGCH (Fig. 3.) *auf der zugehörigen Tangente* ECF *nicht normal steht, sondern auf der concaven Seite der Curve einerseits einen stumpfen* $(y t_1) = \alpha$ *und andererseits einen spitzen Winkel* $(y t_2) = \beta$ *mit derselben bildet, so schneidet die im stumpfen Winkel zunächst folgende Ordinate* y_1 *von der Curve ein kleineres Element* $CG = b_1$ *ab, als von der Tangente* $CE = t_1$*, dagegen ist bei der im spitzen Winkel zunächst folgenden Ordinate* y_2 *das Curven-Element* $CH = b_2$ *gröfser, als das der Tangente* $CF = t_2$*, also ist* $b_1 < t_1$ *und* $b_2 > t_2$.“ *)

Die Richtigkeit des einen Theils dieses Satzes, nämlich dafs der Bogen CH im spitzen Winkel β gröfser als die Tangente CF, oder $b_2 > t_2$, liegt klar vor Augen. Denn zieht man die Sehne CH, so ist sie, weil $\alpha_1 = \alpha$ ein stumpfer Winkel ist, die gröfste Seite im Dreieck CHF, also $CH > CF$, und da offenbar Bogen $b_2 >$ Sehne CH, so ist folglich um so mehr $b_2 > CF$ oder $b_2 > t_2$.

Was den andern Theil des Satzes betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dafs wenn die Curve in der Nähe des Punctes C, nach G hin, keinen singulären Punct hat, dann die Tangente von C bis G ihre Richtung in gleichem Sinne und zwar stetig ändert, so dafs der anfänglich stumpfe Winkel α, welchen die Tangente CE mit der Ordinate y bildet,

*) Man vergleiche unter andern die kleine Schrift von *Crelle* „Ueber die Anwendung der Rechnung etc. Berlin, bei Maurer, 1816.“ wo ein Satz, der mit dem gegenwärtigen nahe übereinkommt, ausführlich erörtert und begründet wird.

stetig abnimmt; da aber diese Abnahme nur allmählig geschieht, so mufs es nothwendig immer, nahe bei C, solche Puncte G geben, wo die zugehörige Tangente GL und Ordinate y_1 nach derselben Seite einen Winkel γ einschliefsen, welcher kleiner als α und gröfser (oder nicht kleiner) als β ist; dann aber ist in dem Dreiecke GKE Winkel $\gamma_1 > \beta_1$, weil $\gamma_1 = \gamma$ und $\beta_1 = \beta$, daher weiter Seite $EK > GK$, und da zufolge des Archimedischen Grundsatzes, $CK + GK > b_1$, so ist folglich um so mehr $CK + KE > b_1$, das ist $t_1 > b_1$, was im Satze behauptet wird.

2. Der vorstehende Satz verliert unter andern namentlich in folgenden drei Fällen seine Gültigkeit: 1) wenn y die Normale im Puncte C ist; 2) wenn C ein Wendungspunct, oder 3) ein Rückkehrpunct der Curve ist, oder einem dergleichen Puncte unendlich nahe liegt.

3. Durch Hülfe des obigen Satzes (1.) ist die folgende Aufgabe leicht zu beantworten:

„*Die besondere Eigenschaft desjenigen Punctes* C *einer beliebigen, auf irgend ein (geradliniges) Coordinaten-System bezogenen Curve, anzugeben, dessen Abscisse* x *im Verhältnifs zu dem zugehörigen Bogen* s, *der von irgend einem gegebenen Puncte* B *der Curve bis zu jenem Puncte* C *genommen wird, ein Maximum oder Minimum ist.*"

Es sei BCC_1 (Fig. 4.) die vorgelegte Curve, B der in ihr gegebene Punct, von welchem der Bogen s anfangen und sich nach der Richtung C, C_1, ... erstrecken soll; ferner seien X, Y die Coordinaten-Axen, A der Anfangspunct, und die Abscisse werde nach Umständen durch x oder z bezeichnet.

Man denke sich in der Curve einen Punct C von der Beschaffenheit, dafs wenn man von der Tangente CD in demselben die Länge des entsprechenden Bogens BC abschneidet, und zwar nach der Seite dieses Bogens hin, also etwa $CD = BC = s$ macht, dann der Endpunct D der Tangente gerade in die Ordinaten-Axe Y fällt: so wird der Punct C im Allgemeinen der Aufgabe genügen. Denn unter diesen Umständen hat man, vermöge der Parallelität der Ordinaten y, y_1, y_2 und ihrer Axe Y:

$$x : DC = x_1 : DG, \quad \text{oder} \quad x : s = x_1 : s - t_1,$$

und ist nun z. B. der Winkel (yt_1), das ist yCD, stumpf und y_1 nahe an y, wo dann $t_1 < b_1$ (1.), so hat man:

$$x : s < x_1 : s - b_1, \quad \text{oder}$$

$$\text{I.} \quad x : s < x_1 : s_1,$$

wenn nämlich der Bogen $BG = s - b_1 = s_1$ gesetzt wird.

Eben so hat man:

$$x : DC = x_2 : DF, \quad \text{oder} \quad x : s = x_2 : s + t_2,$$

und daher, da $t_2 > b_2$ (1.):

$$x : s < x_2 : s + b_2, \quad \text{oder}$$

$$\text{II.} \quad x : s < x_2 : s_2,$$

wo s_2 den Bogen BH bezeichnet.

Demnach ist in der That unter den vorausgesetzten Umständen die Abscisse x des Punctes C im Verhältniſs zum zugehörigen Bogen $s (= BC)$ kleiner als zunächst vor oder nach diesem Puncte, nämlich kleiner als $x_1 : s_1$ (I.) und auch kleiner als $x_2 : s_2$ (II.), folglich ist $x : s$ ein Minimum (oder $s : x$ ein Maximum). Das charakteristische Merkmal dieses Minimums besteht darin, daſs das Ende des Bogens s, in Rücksicht der beiden Winkel $(y t_1)$, $(y t_2)$, welche die Ordinate, auf der concaven Seite der Curve, mit der Tangente bildet, in demjenigen $(y t_1)$ liegt, welcher spitz ist. Findet nämlich das Umgekehrte statt, d. h. ist der Winkel, in welchem das Ende des Bogens s liegt, stumpf, wie etwa bei dem Puncte C_1, wo gleichfalls die Tangente $C_1 D_1$ gleich dem Bogen $BC_1 = s$, und der Winkel $(y t_1)$ stumpf sein soll, so folgt auf dieselbe Weise, wie vorhin, daſs jetzt, wenn die Abscisse für einen Augenblick durch z bezeichnet wird:

$$\text{I.} \quad z : s > z_1 : s_1, \quad \text{und} \quad \text{II.} \quad z : s > z_2 : s_2;$$

daſs also in diesem Falle das Verhältniſs der Abscisse zum zugehörigen Bogen, das ist $z : s$, ein Maximum (oder umgekehrt $s : z$ ein Minimum) ist.

Daſs unter ganz ähnlichen Umständen die Ordinate y im Verhältniſs zum zugehörigen Bogen s ein Minimum oder Maximum wird, ist einleuchtend und zwar durch den vorstehenden Beweis zugleich dargethan, wofern man nämlich die Namen der Coordinaten-Axen X, Y vertauscht.

4. Aus der vorstehenden Betrachtung (3.) schlieſst man zunächst folgende allgemeine Sätze:

a. *„Wird irgend eine Curve* $\mathrm{BCC_1C_2}$.... *auf beliebige Coordinaten-Axen* X, Y *bezogen, und betrachtet man einen veränderlichen Bogen* BC = s *derselben, der von irgend einem festen Puncte* B *anfängt, so ist dieser Bogen im Verhältniſs zu der Abscisse* x *(oder Ordinate* y*), seines beweglichen Endpunctes* C, *unter andern im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum, wenn die Tangente in dem letztern Puncte* C,

nach der Seite des Bogens hin und bis an die Axe Y (*oder* X) *genommen, gerade dem zugehörigen Bogen gleich ist; und zwar findet ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem der Winkel, welchen die Ordinate* y (*oder Abscisse* x) *in dem genannten Endpuncte mit der Tangente* (*nach derselben Seite hin*) *bildet, beziehlich spitz oder stumpf ist.*"
Oder mit andern Worten und anschaulicher:

b. „*Wird die gegebene Curve von dem Puncte* B *an, von welchem der Bogen anfängt, abgewickelt, so entspricht jedem Puncte* D, D_1, D_2, ... (*oder* d, d_1, d_2, ...), *in welchem die Evolvente* BDD_1 *die Axe* Y (*oder* X) *schneidet, auf der gegebenen Curve ein solcher Punct* C, C_1, C_2, ... (*oder* c, c_1, c_2, ...), *dessen Abscisse* (*oder Ordinate*) *im Verhältnifs zum zugehörigen Bogen ein Maximum oder Minimum ist. Ist die gegebene Curve insbesondere endlich und geschlossen oder in sich zurückkehrend, wo dann der Bogen gröfser als ihr Umfang oder als ein beliebiges Vielfache desselben genommen werden kann, oder ist sie spiralförmig: so kann die Evolvente die Axe* Y (*oder* X) *unendlich oft schneiden, und alsdann giebt es in der gegebenen Curve auch unzählige Puncte* C, C_1, C_2, ... (*und* c, c_1, c_2, ...), *denen die angegebene Eigenschaft zukommt.*" Es folgt ferner:

c. „*Wenn die Evolvente die Axe* Y (*oder* X) *in irgend einem Puncte berührt, so fallen in demselben zwei auf einanderfolgende Durchschnittspuncte, etwa* D *in* D_1, *zusammen, und dann vereinigen sich auch die ihnen entsprechenden Puncte* C, C_1 *auf der gegebenen Curve, wovon dem einen ein Minimum und dem andern ein Maximum entspricht; diese verschiedenen Eigenschaften heben aber einander auf, so dafs dem vereinigten Puncte* (CC_1) *keine von beiden zukommen kann, vielmehr besitzt er die Eigenschaft, dafs die zugehörige Ordinate* y, *zugleich die Normale ist. Wenn dagegen die gegebene Curve* BCC_1 *die Axe* Y (*oder* X) *berührt, so ist der Berührungspunct zugleich einer der genannten Puncte* C, C_1, ... (*oder* c, c_1, ...), *und zwar ein solcher, für welchen* x : s *ein Minimum wird; und im Falle die gegebene Curve endlich und geschlossen ist* (b.), *fallen unendlich viele solche Puncte mit jenem Berührungspuncte zusammen.*"

Sieht man die Curve BDD_1.... als gegeben an, so folgt durch Umkehrung:

d. *„Wird eine beliebige Curve* $BDD_1 \ldots\ldots$ *auf irgend ein Coordinaten-System* **YX** *bezogen, so sind diejenigen Puncte in ihr* ($\mathrm{D}, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots\ldots$ *oder* $\mathrm{d}, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots\ldots$), *deren zugehöriger Krümmungshalbmesser* ($\mathrm{DC}, \mathrm{D}_1\mathrm{C}_1$, *etc.*) *im Verhältniſs zu der Abscisse* x *oder Ordinate* y *des Krümmungsmittelpunctes* ($\mathrm{C}, \mathrm{C}_1, \ldots\ldots$ *oder* $\mathrm{c}, \mathrm{c}_1, \ldots\ldots$) *ein Maximum oder Minimum sind, unmittelbar gegeben, nämlich sie sind die Puncte, in welchen die Curve beziehlich von der Ordinaten-* (Y) *oder Abscissen-Axe* (X) *geschnitten wird."*

5. Aus den vorstehenden Sätzen (4.) lassen sich nun weiter unter andern nachstehende besondere Sätze folgern.

Wird angenommen die Coordinaten-Axen Y, X seien zu einander rechtwinklig, und irgend eine endliche, geschlossene, überall convexe Curve $A\mathfrak{C}BCA$ (Fig. 5.) sei in Bezug auf die Axe Y symmetrisch und werde von ihr in den Puncten A, B geschnitten, so daſs also jede Sehne $C\mathfrak{C}$, $C_1\mathfrak{C}_1, \ldots\ldots$, welche der Axe X parallel, von der Axe Y gehälftet wird, und daſs die Tangenten in A, B der Axe X parallel sind: so wird, wenn man den Bogen s von A anfangen läſst, der Punct C, in dem Falle, wo die Tangente CD dem Bogen $A\mathfrak{C}C$ gleich ist, der erste sein, dessen Abscisse $CE = x$ im Verhältniſs zum zugehörigen Bogen $A\mathfrak{C}C = s$ ein Maximum wird (4.). Dann ist aber auch zugleich, vermöge der Symmetrie, die Abscisse $\mathfrak{C}E$ im Verhältniſs zum Bogen $AC\mathfrak{C}$ ein Maximum, und folglich ist sofort die Sehne $C\mathfrak{C}$ im Verhältniſs zur Summe beider Bogen $A\mathfrak{C}C + AC\mathfrak{C} = u + CB\mathfrak{C}$, wo u den Umfang der Curve bezeichnet, ein Maximum. Gleicherweise folgt, daſs, wenn bei der Sehne $C_1\mathfrak{C}_1$ die Tangenten $C_1D_1 + \mathfrak{C}_1D_1 =$ Bog. $A\mathfrak{C}CAC_1 + AC\mathfrak{C}A\mathfrak{C}_1 = 2u + C_1A\mathfrak{C}_1 = s_1$, dann das Verhältniſs $C\mathfrak{C} : s_1$ ein Maximum ist. Eben so wird das Verhältniſs $C\mathfrak{C} : s_{2n-1}$ oder $C_1\mathfrak{C}_1 : s_{2n}$ ein Maximum, wenn die Sehne $C\mathfrak{C}$ oder $C_1\mathfrak{C}_1$ so beschaffen, daſs $CD + \mathfrak{C}D = (2n-1)u + CB\mathfrak{C} = s_{2n-1}$ oder $C_1D_1 + \mathfrak{C}_1D_1 = 2nu + C_1A\mathfrak{C}_1 = s_{2n}$, wo n irgend eine ganze positive Zahl (1, 2, 3, ...) bezeichnet. Ähnliche Resultate erhält man, wenn die Theile des Bogens s von B, statt von A, anfangen. Also:

a. *Wenn eine geschlossene convexe Curve* $\mathrm{A\mathfrak{C}BCA}$ *in Bezug auf irgend eine Axe* **Y** *senkrecht symmetrisch ist, so ist jede zur Axe senkrechte Sehne* $\mathrm{C\mathfrak{C}}$, $\mathrm{C_1\mathfrak{C}_1}$ *im Verhältniſs zum zugehörigen Bogen* s *ein Maximum, wenn dieser Bogen der Summe der Tangenten in seinen Endpuncten, von da bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte* D, D_1 *genom-*

men ($CD + \mathfrak{C}D$, $C_1 D_1 + \mathfrak{C}_1 D_1$), *gleich ist; und zwar ist dabei der Bogen jedesmal gröfser als der Umfang* u *der Curve, nämlich er besteht aus dem einfachen Bogenstück* ($CB\mathfrak{C}$, $C_1 A \mathfrak{C}_1$), *welches, nach der Seite hin, wo die Tangenten sich treffen, über der Sehne liegt, und aufserdem aus* n*Mal dem Umfange* u, *wo* n *irgend eine ganze positive Zahl (mindestens* $= 1$) *bezeichnet.*"

Fügt man zu den obigen Annahmen noch die hinzu: die Axe X solle die Curve in A berühren: und denkt sich sofort den Punct C so beschaffen, dafs Tangente $CD =$ Bogen AC, so ist die Ordinate $y = AE$ dieses Punctes im Verhältnifs zum Bogen AC ein Maximum (4.), und weil vermöge der Symmetrie $A\mathfrak{C} = AC$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{d} = Cd$, so ist zugleich auch $AE : A\mathfrak{C}$ ein Maximum und folglich auch $AE : AC + A\mathfrak{C}$ oder $AE : CA\mathfrak{C}$ ein Maximum, d. h. „sodann ist die Höhe $AE = y$ des Curven-Segments $CA\mathfrak{C}C$, im Verhältnifs zum Bogen $CA\mathfrak{C}$, ein Maximum." Dasselbe trifft offenbar ein, wenn Tangente $Cd =$ Bogen $AC\mathfrak{C}AC = u + AC$, oder allgemein $Cd = nu + AC$, wo dann zugleich $\mathfrak{C}\mathfrak{d} = nu + A\mathfrak{C}$, und mithin $Cd + \mathfrak{C}\mathfrak{d} = 2nu + CA\mathfrak{C}$ ist. Fangen dagegen die Theile des Bogens von B an, und ist z. B. Tangente $Cd =$ Bogen $B\mathfrak{C}AC$ und Tangente $\mathfrak{C}\mathfrak{d} =$ Bogen $BCA\mathfrak{C}$, mithin der ganze Bogen $= u + CA\mathfrak{C}$, so ist ebenfalls das genannte Verhältnifs ein Maximum, so wie wenn allgemein $Cd + \mathfrak{C}\mathfrak{d} = (2n - 1)u + CA\mathfrak{C}$ ist. Also:

b. „*Ist eine geschlossene convexe Curve* $ACB\mathfrak{C}A$ *in Bezug auf irgend eine Axe* Y *symmetrisch und man schneidet durch eine zur Axe senkrechte Sehne* $C\mathfrak{C}$ *ein Segment ab, so ist die Höhe* $AE = y$ *desselben im Verhältnifs zum Bogen* s *im Allgemeinen ein Maximum, wenn die Tangente* X *im Scheitel der Curve (oder in der Mitte* A *des Bogens) von den Tangenten* Cd, $\mathfrak{C}\mathfrak{d}$ *in den Endpuncten* C, $\mathfrak{C}$ *des Bogens solche Stücke abschneidet, wovon jedes dem halben Bogen gleich ist. Dieser Zustand kann unendlich oft eintreten: aber von dem einen Mal bis zum nächstfolgenden nimmt der Bogen zu, enthält den Umfang* u *der Curve einmal mehr, so dafs er im Allgemeinen aus* $(n-1)u$ *und aus einem Stück* $CA\mathfrak{C}$ *besteht; auch sind die Maxima der Reihe nach immer kleiner, so dafs das erste, wo* $n = 1$ *und der Bogen* s *nur aus dem Stück* $CA\mathfrak{C}$ *besteht, das gröfste ist.*"

6. Wenn die gegebene Curve $ACB\mathfrak{C}A$ insbesondere ein Kreis ist, so folgen, wenn man bemerkt, dafs alle Kreise einander ähnlich sind, aus den vorstehenden Sätzen (5.) unmittelbar die folgenden:

Unter allen Kreissegmenten (von verschiedenen Kreisen, aber) von gleich langen Bogen, ist bei demjenigen die Sehne (C𝔈) im Verhältnifs zum Bogen (s) ein Maximum, bei welchem die Summe der Tangenten in den Endpuncten des Bogens, von da bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt (D oder D_1) genommen, dem Bogen gleich ist; dieser Zustand tritt bei unendlich vielen Kreisen ein, aber jedesmal ist der Bogen s *gröfser als der Umfang* u *des Kreises, nämlich er besteht aus* nu *und aus dem kleineren Bogenstück* (CB𝔈 *oder* $C_1A𝔈_1$) *über der Sehne* (C𝔈 *oder* $C_1𝔈_1$); *auch werden die Maxima der Reihe nach, wenn* n = 1, 2, 3, 4, ... *ist, immer kleiner."*

b. *„Unter allen Kreissegmenten von gleich langem Bogen, hat dasjenige die gröfste Höhe* AE = y, *bei welchem die Tangenten* (Cd, 𝔈𝔡) *in den Endpuncten des Bogens von derjenigen in der Mitte* A *desselben ein Stück* d𝔡(= Cd + 𝔈𝔡) *begrenzen, welches dem Bogen gleich ist; dieser Zustand kann bei unendlich vielen Kreisen eintreten, aber nur das erste Mal ist der Bogen* CA𝔈 *kleiner als der zugehörige Kreis; bei jedem spätern Male besteht er aus* nu *und aus dem gröfsern Bogenstück* (CA𝔈) *über der Sehne, wo* n *nacheinander die Werthe* 1, 2, 3, 4, ... *hat; dabei werden die verschiedenen Maxima der Reihe nach immer kleiner."*

7. Man denke sich die Schaar Kreise (d. i. alle möglichen), welche die Axe X (Fig. 6.) in demselben festen Puncte A berühren und deren Mittelpuncte M, m, M_1, m_1, ... auf einerlei Seite von X in der Axe Y liegen, nehme auf allen Kreisen, von A an und nach gleicher Richtung, Bogen AD, AC, Ac, ... von derselben gegebenen Länge s, so dafs $AD = AC = Ac = \ldots = s$, so werden die Endpuncte D, C, c, ..., der Bogen in irgend einer bestimmten Curve $DCcAc_1C_1$.... liegen. Die Gerade AD ist nämlich in dem Falle als Bogen anzusehen, wo der Kreis unendlich grofs wird und mit der Axe X zusammenfällt. Die Curve fängt also von D an, geht von da, indem der erzeugende Kreis kleiner wird, aber sein Umfang u noch stets gröfser als s ist, über C, c nach A, wo sie die Axe X berührt, und wo der Umfang u des zugehörigen Kreises gerade $= s$ wird. Von A kehrt die Curve zurück, bildet die Schleife $Ac_1C_1c_2A$, für welche s zwischen u und $2u$ liegt, berührt dann abermals die Axe X in A, wenn s gerade $= 2u$ ist, u. s. w., nämlich die Curve enthält unendlich viele Schleifen, die sich immer enger zusammenziehen, so dafs jede die nachfolgende umschliefst, und eben so oft berührt sie die Axe X in

A, wo jedesmal s gerade ein Vielfaches von u wird. Frägt man nun nach der Eigenschaft derjenigen Puncte der in Betracht stehenden Curve, für welche die Ordinate y oder Abscisse x ein **Maximum** wird, so geben die obigen Sätze (6.) unmittelbar folgende Antwort:

a. *Die Abscisse* x *wird in allen denjenigen Puncten* $D, c, c_1, c_2, \ldots$ *ein Maximum, wo die Normale des zugehörigen Erzeugungskreises durch den festen Punct* D *geht, oder wo die Tangente (z. B.* cd*) des Kreises* (m) *bis an die Axe* Y *genommen, dem constanten Kreisbogen* s *(oder* AD*) gleich ist."*

b. *Die Ordinate* y *wird in allen denjenigen Puncten* $C, C_1, C_2, \ldots$ *ein Maximum, wo die Tangente* ($CD, C_1D_1, \ldots$) *an den zugehörigen Erzeugungskreis* ($M, M_1, \ldots$) *durch den festen Punct* D *geht: daher liegen alle Puncte, für welche die Ordinate ein Maximum wird, in einem Kreise* $CC_1C_2 \ldots A$, *welcher* D *zum Mittelpunct und* $DA = s$ *zum Radius hat."*

Dafs in dem Falle, wo die Tangente $cd = DA = s$, alsdann die Normale oder der Radius cm des Kreises durch D geht (a.), oder auch umgekehrt, folgt aus der Congruenz der Dreiecke med und mAD.

Die in Rede stehende Curve $DCcAc_1 \ldots$ ist übrigens dieselbe, welche in dem Satze 14., Bd. XIV., S. 91 d. Journ. durch eine scheinbar andere Bedingung bestimmt wird, und welche daselbst „**barycentrische Curve**" genannt worden. Beschreibt man nämlich mit dem Radius $AD = s$ aus A den Kreis DGE, und läfst in diesem, von dem festen Puncte D an, nach G, E hin, einen Bogen stetig wachsen, so ist der Ort seines Schwerpunctes die oben beschriebene Curve $DCcAc_1C_1 \ldots$ Denn angenommen, die Sehnen DE und AC irgend zweier Bogen DGE und $AFC = AD = s$ stehen auf einander rechtwinklig, so liegt der Schwerpunct des Bogens DGE in AC, und dann sind die Kreissegmente $DGED$ und $AFCA$ einander ähnlich (weil DA nach der obigen Construction den Bogen AFC in A berührt), so dafs man hat:

$$DGE : DE = AFC : AC,$$

oder

$$DGE : DE = AD : AC,$$

woraus folgt, dafs C der Schwerpunct des Bogens DGE ist.

Nun hat die Curve $DCcA \ldots$, nach Angabe des citirten Satzes, die Eigenschaft, dafs für jeden Punct C derselben, EC die zugehörige Tan-

gente ist; wobei dann ferner $EC = DC$ und Winkel $\alpha = \alpha_1$, $\gamma = \gamma_1$. Daraus folgen die vorstehenden Sätze leicht. Denn in dem Falle, wo die Ordinate y irgend eines Punctes C ein Maximum werden soll, muſs die Tangente EC der Axe X parallel sein; alsdann aber ist $\beta = \alpha_1$, daher auch $\beta = \alpha$ und daher weiter $DA = DC$ (weil DE auf AC senkrecht), folglich ist auch DC Tangente des Kreises AFC, weil DA es ist. Eben so muſs, wenn die Abscisse x irgend eines Punctes c ein Maximum werden soll, die zugehörige Tangente cx der Axe Y parallel sein; alsdann ist $\varepsilon = \delta_1$, und da stets $\delta = \delta_1$, so ist also $\varepsilon = \delta$, daher $mc = mA$, mithin m der Mittelpunct des entsprechenden Erzeugungskreises und folglich, vermöge der Congruenz der Dreiecke mcd und mAD, die Tangente $dc = DA$. Dieses Alles stimmt mit den obigen Sätzen überein.

6.

Problematis analytici, a cl. Hill in huius diarii vol. XVI. pag. 95. propositi solutio,

tentata a *F. Heinen*, Clivii.

„Datis functionibus quibusvis $(p, q, r \ldots)$ quantitatum totidem $(x, y, z \ldots)$ aliam functionem Φ invenire eiusmodi, ut valoribus datarum in argumentorum locos suffectis, eadem resurgat vel tantum quantitate constante (c) a primitivo valore differat; videlicet: $\Phi(p,q) = \Phi(x,y) + c$, $\Phi(p,q,r) = \Phi(x,y,z) + c$, ... etc."

Sint primum, x, y duae variabiles earumque functiones datae $f(x)$, $F(y)$ et functio Φ invenienda talis, ut sit

$$\text{I.} \quad \Phi[f(x), F(y)] = \Phi(x.y) + c.$$

Ponamus $x = u_s$, $y = u_t$, $f(x) = u_{s+1}$, $F(y) = u_{t+1}$, scilicet u_s et u_t designantibus functiones variabilium s, t. Iam habemus differentiarum aequationes $u_{s+1} = f(u_s)$ et $u_{t+1} = F(u_t)$, ex quibus integrando deducatur $u_s = x = \varphi(s)$, $u_t = y = \psi(t)$, unde etiam s per functionem quandam (φ') variabilis x et t per functionem quandam (ψ') variabilis y exprimi potest, itaque

$$\text{II.} \quad s = \varphi'(x), \quad t = \psi'(y)$$

prodibit. Iisdem autem statuendis functiones $\Phi[f(x), F(y)]$ et $\Phi(x,y)$ fiunt $\Phi[u_{s+1}; u_{t+1}]$, et $\Phi(u_s, u_t)$, quae brevius hoc modo $w_{s+1,t+1}$, $w_{s,t}$ scribi possunt, ita ut aequatio superior I. fiat:

$$\text{III.} \quad w_{s+1,t+1} = w_{s,t} + c,$$

quam facile integramus ponendo $w_{s,t} = \log a.\alpha^s\beta^t$, litteris a, α, β designantibus constantes indeterminatas. Nam valore $w_{s,t} = \log a\,\alpha^s.\beta^t$, eoque, qui inde sequitur $w_{s+1,t+1} = \log a\,\alpha^{s+1}.\beta^{t+1}$ in aequatione III. substitutis provenit: $\log a\,\alpha^{s+1}\beta^{t+1} = \log a\,\alpha^s\beta^t + c$, igitur $\log\alpha\beta = c$, sive $\alpha\beta = e^c$, et $\beta = \frac{1}{\alpha}.e^c$, ubi e logarithmorum naturalium basin designat. Est igitur $w_{s,t} = \log a.\alpha^s\left(\frac{1}{\alpha}\right)^t.e^{c.t}$ sive $\Phi(x,y) = \log a\,\alpha^{\varphi'(x)}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\psi'(y)}.e^{c.\psi'(y)}$ functio quaesita.

Huic functioni pro unoquoque indeterminatarum a et α valore id, quod quaesivimus, proprium esse, sive

IV. $$\log a\, \alpha^{\varphi'[f(x)]}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\psi'[F(y)]}.e^{c\psi'[f(y)]} = \log a\, \alpha^{\varphi'(x)}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\psi'(y)}.e^{c\psi'(y)} + C$$

esse, facile perspicies. Etenim, si in aequationibus II. loco x, y ponas $f(x)$, $F(y)$ in has: $s+1=\varphi'[f(x)]$, $t+1=\psi'[F(y)]$ transeant, necesse est, unde aequatio superior IV. fit:

$$\log a.\alpha^{s+1}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{t+1}.e^{c(t+1)} = \log a.\alpha^{s}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{t}.e^{ct} + C,$$

sive $\log e^c = C$, sive denique $c = C$.

Ceterum manifestum est, etiam $\Phi(x,y) = \log a\, \alpha^{\psi'(y)}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\varphi'(x)}.e^{c\varphi'(x)}$ problemati satisfacere.

Quodsi pro una tantum variabili x eiusque functione $f(x)$ functio Φ determinari debeat, ponendo $w_s = \log a.\alpha^s$ eadem ratione obtinebitur $\log\alpha = c^s$, sive $\alpha = e^c$, igitur $w_s = \Phi(x) = \log a.e^{cs} = cs + \log a$, qua in aequatione pro s valor substituendus erit, qui consequitur ex aequationis $u_{s+1} = f(u_s)$ integrali $u_s = x = \varphi'(s)$.

Sin autem pro pluribus variabilibus e: c x, y, z earumque functionibus $f(x)$, $F(y)$. $\mathfrak{F}(z)$ functio Φ invenienda sit talis quae reddat:

$$\Phi[f(x), F(y), \mathfrak{F}(z)] = \Phi(x,y,z) + C$$

eadem prorsus ratione, per aequationes: $u_{s+1} = f(x) = f(u_s)$, $u_{t+1} = F(y) = F(u_t)$, $u_{v+1} = \mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(u_v)$, earumque integralia assecuti: $s = \varphi'(x)$, $t = \psi'(y)$, $v = \chi'(z)$, ex aequatione

$$w_{s+1,t+1,v+1} = w_{s,t,v} + C$$

ponendo $w_{s,t,v} = \log a.\alpha^s.\beta^t.\gamma^v$ invenimus: $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta}.e^c$, itaque pro functione quaesita:

$$\Phi(x,y,z) = \log a.\alpha^{\varphi'(x)}.\beta^{\psi'(y)}.\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{\chi'(z)}.e^{c.\chi'(z)}.$$

Atque apparet, hanc functionem pro omnibus valoribus, quos constantibus a, α et β attribuas, etiamsi $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ et $\chi'(z)$ inter se commutaveris, problema resoluturam esse.

Cliviis mense Febr. 1837.

7.

Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's „Traité de la résolution des équations numeriques article IV. No. 79."

(Von dem Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

In den zwei ersten N^{os}. dieser Abtheilung IV. wird die Schwierigkeit bemerkbar gemacht, aus den nach der Methode der Kettenbrüche erhaltenen transformirten Gleichungen jedesmal die zunächst liegenden ganzen Zahlen der Wurzeln derselben herauszufinden: namentlich, wenn die Wurzeln um weniger als Eins von einander abstehen. Es scheint, fährt der Verfasser fort, als müfste in diesem Falle auf jede der transformirten Gleichungen das allgemeine Verfahren (das Herstellen der Gleichung mit den Quadraten der Unterschiede der Wurzeln) besonders angewendet werden, um die einer jeden Wurzel zunächst liegende ganze Zahl zu finden. Diesem Übelstande abzuhelfen, wird nun das in No. 79. enthaltene Verfahren vorgeschlagen, welches dem Inhalte nach hier folgt.

Es seien λ und Λ Grenzwerthe der gesuchten Wurzel der vorgelegten Gleichung in x, und durch successives Anwenden der Methode der Kettenbrüche zur nähern Bestimmung dieser Wurzel sei man auf die Gleichung

$$(a.) \qquad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'},$$

gekommen, wo $\frac{\pi}{\pi'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerthe von x sind und t die Unbekannte der letzten transformirten Gleichung vorstellt: dann kann man zu Grenzwerthen für t auf folgendem Wege gelangen. Man hat aus Gleichung $(a.)$

$$(b.) \qquad t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}.$$

Da nun λ und Λ Grenzwerthe von x sind, so müssen die Ausdrücke

$$\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$$

Grenzwerthe von t abgeben. Beträgt daher der Unterschied dieser Grenz-

werthe weniger als Eins, so hat man auch sogleich den verlangten ganzen Zahlenwerth von t u. s. w.

Eine Folgerung, wie die hier von *Lagrange*, scheint unserer ganzen Art zu denken völlig gemäfs zu sein. Man wird kaum ein Bedenken tragen, in dem viel allgemeinern Falle, wenn aus der Gleichung

$$x = \varphi(t)$$

die Gleichung

$$t = \psi(x)$$

abgeleitet wäre, wo φ und ψ bekannte Functionen andeuten, eine der obigen analoge Folgerung zu machen. Gleichwohl ist diese Folgerung nur unter der Beschränkung zulässig, wenn aus beiden Functionsformen φ und ψ ein gleicher Genauigkeitsgrad für die abhängigen Variabeln erzielt werden kann.

Dafs die Gleichungen ($a.$) und ($b.$) dieser Anforderung nicht entsprechen, soll in Folgendem dargethan werden.

Die ganzen Zahlen ϱ, ϱ', π, π' haben gleiche Zeichen; man kann daher dieselben, wie die Gröfsen t und x, als mit positiven Zeichen versehen, voraussetzen. Ferner hat man, wenn

$$\frac{\varrho}{\varrho'} > x \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\pi'} < x$$

vorausgesetzt wird, die Gleichung

$$\varrho\pi' - \pi\varrho' = 1.$$

Wird daher durch Δt der nämliche Fehler in t, und durch Δx der hieraus entspringende Fehler in x vorgestellt, so hat man, wenn in einer der Gleichungen ($a.$) oder ($b.$) t in $t + \Delta t$ und x in $x + \Delta x$ umgesetzt wird, folgende Gleichung:

$$c. \qquad \Delta x = \frac{\Delta t}{(\varrho' t + \pi')^2 + \varrho'(\varrho' t + \pi')\Delta t}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dafs ein Fehler in der Annahme des Werthes von t einen viel kleinern in der Bestimmung von x hervorruft. Ja sogar, wenn der Fehler in t, oder wenn man $\Delta t > 1$ hat, wird man dennoch, nach dem was über die Beschaffenheit der Gröfsen ϱ, ϱ', π, π', t festgesetzt ist, jedesmal $\Delta x < 1$ haben.

Hieraus folgt aber auch umgekehrt: ein in x begangener Fehler, der sogar kleiner als die Einheit ist, kann einen Fehler in t hervorrufen, der die Einheit übertrifft.

Es bieten daher die oben gefolgerten zwei Grenzwerthe für t im Allgemeinen keinen Anhaltspunct zur Bestimmung von t dar; und, wie aus dem eben Mitgetheilten erhellet, auch dann nicht, wenn ihr Unterschied kleiner als die Einheit ausfällt. Nur in dem Falle, wenn eine fehlerhafte Annahme für x einen Fehler in t hervorruft, der numerisch kleiner als die Einheit ist, wird diese Folgerung statthaft sein.

Um diesen Fall herzustellen, suche man aus der Gleichung (c.) den Werth von Δt, so hat man:

$$\Delta t = \frac{(\varrho' t + \pi')^2 \Delta x}{1 - \varrho'(\varrho' t + \pi')\Delta x}.$$

Damit nun $\Delta t < 1$ sei, mufs man die Ungleichheit haben:

$$(\varrho' t + \pi')^2 \Delta x < 1 - \varrho'(\varrho' t + \pi')\Delta x,$$

oder

$$(d.) \qquad \Delta x < \frac{1}{(\varrho' t + \pi')^2 + \varrho'(\varrho' t + \pi')}.$$

Ist man nun in der Bestimmung einer Wurzel x, nach der Methode der Kettenbrüche, zur Gleichung (a.) gelangt, so ist der genaueste Werth von x der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$. Wenn daher

$$\frac{\varrho}{\varrho'} - x = \Delta x$$

angenommen wird, so hat man, mit Zuziehung der Gleichung (a.),

$$\Delta x = \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}.$$

Die von *Lagrange* durch λ und Λ angedeuteten Grenzwerthe von x liegen im Allgemeinen nicht so nahe dem wahren Werthe von x als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$. Die aus denselben für x entspringenden Fehler sind daher gröfser als der eben gefundene Bruch $\frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$, und dieser Bruch ist endlich gröfser als der Bruch in der Ungleichheit (d.). Daher kann vom Statthaben der Ungleichheit (d.) bei der Annahme $x = \lambda$ oder $x = \Lambda$ um so weniger die Rede sein.

Zürich den 1. Mai 1837.

8.

Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Professor *Hamilton* hat in zweien Abhandlungen in den *Philos. Transact.* vom J. 1834. P. II. und vom J. 1835. P. I. das merkwürdige Resultat gefunden, dafs in den Fällen der Mechanik, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich die Integralgleichungen der Bewegung, eben so wie die Differentialgleichungen in der ihnen von *Lagrange* gegebnen Form, sämmtlich durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function darstellen lassen. Der Gang seiner Betrachtung ist ungefähr der folgende.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Puncten, welche den Bedingungen $F=0$, $F_1=0$, ..., unterworfen sind,

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\ldots\ldots,$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\ldots\ldots,$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_i}\ldots\ldots,$$

in welchen Gleichungen dem Index i die Werthe 1, 2, ... n zu geben sind, und m_i die Masse eines Punctes bedeutet, dessen rechtwinklige Coordinaten x_i, y_i, z_i sind. Dies ist die *Lagrange*sche Form der Differentialgleichungen, welche ihnen in allen Fällen gegeben werden kann, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=U+h,$$

wo h eine Constante. Die Gröfsen λ, λ_1 etc. sind der Symmetrie wegen

eingeführte Factoren, welche vermittelst der Bedingungsgleichungen eliminirt werden müssen. Die Function U, deren partielle Differentiation die angebrachten Kräfte giebt, will ich die **Kräftefunction** nennen.

Hat man die aufgestellten Differentialgleichungen vollständig integrirt, so kennt man die $3n$ Coordinaten als Functionen der Zeit und der willkührlichen Constanten. Es werden diese Werthe in die Kräftefunction U substituirt, und ihr partielles Differentiale nach einer der willkührlichen Constanten, die ich α nennen will, genommen: so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \Sigma\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]$$
$$= \Sigma m_i\left[\frac{d^2 x_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 y_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 z_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right],$$

da die in λ, λ_1, ... multiplicirten Ausdrücke wegen der Bedingungsgleichungen verschwinden.

Den letztern Ausdruck kann man auch so darstellen:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}$$
$$-\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha\,\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha\,\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z_i}{\partial \alpha\,\partial t}\right].$$

Der zweite Theil des Ausdruckes rechter Hand vom Gleichheitszeichen läfst sich ebenfalls als ein partielles, nach α genommenes Differentiale darstellen:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}^2+\frac{\partial y_i}{\partial t}^2+\frac{\partial z_i}{\partial t}^2\right]}{\partial \alpha},$$

wodurch die vorstehende Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial\left[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}^2+\frac{\partial y_i}{\partial t}^2+\frac{\partial z_i}{\partial t}^2\right)\right]}{\partial \alpha}$$
$$= \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}.$$

Diese merkwürdige Gleichung ist den Analysten, welche sich mit der Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik beschäftigt haben, nicht entgangen. Es folgt daraus mit Leichtigkeit eines der Haupttheoreme dieser Theorie. Setzt man nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x', \quad \frac{\partial y}{\partial t} = y', \quad \frac{\partial z}{\partial t} = z',$$

so daſs die vorstehende Gleichung wird:

$$\frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial\alpha}=\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt},$$

und bedeutet β irgend eine zweite willkührliche Constante, so sehen wir daſs die beiden Ausdrücke

$$\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt},\quad\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]}{dt}$$

die partiellen Differentialquotienten eines und desselben Ausdrucks

$$U+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$$

sind, das eine Mal nach α, das andere Mal nach β genommen. Es wird also das Differential des ersten Ausdrucks nach β genommen gleich dem Differential des zweiten Ausdrucks nach α genommen sein, welches nach Weglassung der sich aufhebenden Terme die Gleichung giebt:

$$\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt}$$

$$-\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]}{dt}=0.$$

Diese Gleichung lehrt, daſs der Ausdruck

$$\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]-\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]$$

von t unabhängig oder eine bloſse Constante ist, welches der berühmte *Lagrange*sche Satz ist. Man beweist auch noch leicht, daſs wenn γ irgend eine dritte willkührliche Constante ist, und man jenen Ausdruck mit (α,β) bezeichnet, die Gleichungen Statt finden:

$$(\alpha,\alpha)=0,\qquad(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=0,$$

$$\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial\beta}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma}=0.$$

Aber *Hamilton* zieht aus der Gleichung, welche wir fanden:

$$\frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial\alpha}=\frac{d\Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right)}{dt},$$

neue Vortheile durch folgendes Verfahren, welches eben sowohl durch die Methode als durch die Resultate, zu welchen es führt, höchst bemerkenswerth ist. Setzt man nämlich:

$$S = \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]\, dt,$$

so ist nach der bekannten Regel der Differentiation unter dem Zeichen:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^t \frac{\partial [U + \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]}{\partial \alpha}\, dt,$$

oder der obigen Gleichung zu Folge:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^t \frac{d\Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + y_i'\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + z_i'\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right)}{dt}\, dt.$$

Sind a, b, c die Anfangswerthe von x, y, z und a', b', c' die Anfangswerthe von x', y', z', oder diejenigen Werthe, welche dem Werthe $t = 0$ entsprechen, so giebt diese Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + y_i'\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + z_i'\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right) - \Sigma m_i\left(a_i'\frac{\partial a_i}{\partial \alpha} + b_i'\frac{\partial b_i}{\partial \alpha} + c_i'\frac{\partial c_i}{\partial \alpha}\right).$$

Die Function S ist eine Function von t und den willkührlichen Constanten; sie wurde dadurch definirt, dafs ihr nach t genommenes Differentiale gleich ist der Summe der Kräftefunction und der halben lebendigen Kraft. Die vorstehende Gleichung lehrt auch ihr Differentiale finden, wenn man blofs die willkührlichen Constanten als veränderlich betrachtet. Bezeichnet man nämlich durch die Characteristik ∂' das Differentiale, welches man erhält, wenn man gleichzeitig alle willkührlichen Constanten ändert, t aber ungeändert läfst, so giebt die vorstehende Gleichung, wenn man sie mit $\partial \alpha$ multiplicirt, und die Summe aus allen ähnlichen bildet, die man für jede der willkührlichen Constanten erhält,

$$\partial' S = \Sigma m_i(x_i'\partial' x_i + y_i'\partial' y_i + z_i'\partial' z_i) - \Sigma m_i(a_i'\partial' a_i + b_i'\partial' b_i + c_i'\partial' c_i).$$

Dies ist das vollständige Differential von S, wenn man t constant setzt, und es als Function der willkührlichen Constanten betrachtet.

Ist das System ganz frei, so hat man $6n$ willkührliche Constanten, als deren Functionen S und die $6n$ Gröfsen x, y, z, a, b, c betrachtet werden. Vermittelst der Integralgleichungen kann man die $3n$ Gröfsen a, b, c durch diese $6n$ Constanten ausdrücken, und die $3n$ Gröfsen x, y, z durch diese Constanten und die Zeit t. Man kann daher auch die $6n$ willkührlichen Constanten als Functionen der Zeit und der $6n$ Gröfsen x, y, z, a, b, c betrachten, wodurch auch S eine Function der Zeit t und der $6n$ Gröfsen x, y, z, a, b, c wird. Nimmt man in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von S, so giebt der vorstehende Ausdruck des vollständigen Differentials

von S, sogleich seine nach den Gröfsen x, y, z, a, b, c genommenen partiellen Differentiale, nämlich:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a_i'$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b_i'$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c_i'$$

Die vorstehenden $6n$ Gleichungen kann man als die vollständigen Integralgleichungen der vorgelegten Aufgabe betrachten, und zwar sind die Gleichungen links die $3n$ Integrale erster Ordnung (welche *Hamilton* auch Zwischenintegrale nennt), die Gleichungen rechter Hand, die $3n$ endlichen Integrale selber.

Ist das System nicht frei, sondern sind die k Bedingungen gegeben,

$$F=0, \quad F_1=0, \quad \ldots . \quad F_{k-1}=0,$$

welchen die Puncte desselben Genüge leisten müssen; so kann man die $3n$ Functionen x, y, z, welche man sucht, auf $3n-k$ reduciren, und braucht von den $3n$ Differentialgleichungen 2ter Ordnung nur $3n-k$ anzuwenden. Man hat daher nur $6n-2k$ willkührliche Constanten, für welche man in den Ausdruck von S wieder die $3n-k$ Gröfsen, auf welche man die $3n$ Gröfsen, x, y, z zurückgeführt hat, und ihre Anfangswerthe, auf welche sich durch dieselbe Bedingungsgleichungen die $3n$ Gröfsen a, b, c zurückführen lassen, einführen kann. Zu der Gleichung durch welche wir, wenn man t constant setzt, das vollständige Differentiale von S, im obigen Sinne genommen ausgedrückt haben, und welche sich auch so darstellen läfst,

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - m_i x_i'\right)\partial x_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial a_i} + m_i a_i'\right)\partial a_i \\ + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial y_i} - m_i y_i'\right)\partial y_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial b_i} + m_i b_i'\right)\partial b_i \\ + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial z_i} - m_i z_i'\right)\partial z_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial c_i} + m_i c_i'\right)\partial c_i, \end{aligned}$$

sind dann eben so k von den $3n$ Differentialen $\partial x, \partial y, \partial z$ und k von den Differentialen $\partial a, \partial b, \partial c$ vermittelst der Bedingungsgleichungen zu eliminiren und die in die übrigen unabhängigen Differentialen multiplicirten Ausdrücke einzeln $=0$ zu setzen. Bedeutet F^0 den Ausdruck von F, wenn man darin für die $3n$ Gröfsen x, y, z ihre Anfangswerthe a, b, c setzt, so bewerkstelligt man diese Elimination, indem man die k Gleichungen,

$$\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\partial x_i+\frac{\partial F}{\partial y_i}\partial y_i+\frac{\partial F}{\partial z_i}\partial z_i\right)=\partial F=0$$

. . . .

und die k Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}\partial a_i+\frac{\partial F^0}{\partial b_i}\partial b_i+\frac{\partial F^0}{\partial c_i}\partial c_i\right)=\partial F^0=0$$

. . . .

jede mit einem Factor multiplicirt, zu der obigen Gleichung hingefügt, und diese Factoren so bestimmt, dafs die k von den Differentialen ∂x, ∂y, ∂z, und die k von den Differentialen ∂a, ∂b, ∂c, welche man eliminiren will, verschwinden. Da nun auch die in die übrigen unabhängigen Differentialen multiplicirten Ausdrücke verschwinden müssen, so erhält man, wenn man die Factoren mit λ, λ_1, ..., $-\lambda^0$, $-\lambda^0_1$ .... bezeichnet, das System von $6n$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_i x_i' &= \frac{\partial S}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\dots\\
m_i y_i' &= \frac{\partial S}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i}+\dots\\
m_i z_i' &= \frac{\partial S}{\partial z_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_i}+\dots\\
m_i a_i' &= -\frac{\partial S}{\partial a_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial a_i}+\lambda^0_1\frac{\partial F^0_1}{\partial a_i}+\dots\\
m_i b_i' &= -\frac{\partial S}{\partial b_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial b_i}+\lambda^0_1\frac{\partial F^0_1}{\partial b_i}+\dots\\
m_i c_i' &= -\frac{\partial S}{\partial c_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial c_i}+\lambda^0_1\frac{\partial F^0_1}{\partial c_i}+\dots,
\end{aligned}$$

welche jetzt als die vollständigen Integralgleichungen mit Hinzuziehung der Bedingungsgleichungen

$$F=0,\quad F_1=0,\ \dots$$
$$F_0=0,\quad F^0_1=0,\ \dots$$

zu betrachten sind. Die Multiplicatoren werden durch Auflösung einer gleichen Zahl linearer Gleichungen gefunden, welche man dadurch erhält, dafs man die vorstehenden Gleichungen in die folgenden durch Differentiation aus den Bedingungsgleichungen sich ergebenden substituirt.

$$\frac{dF}{dt}=\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F}{\partial z_i}z_i'\right)=0,$$
$$\frac{dF_1}{dt}=\Sigma\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F_1}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F_1}{\partial z_i}z_i'\right)=0,$$

. . . .,

so wie die Gleichungen die man für $t = 0$ aus diesen erhält,

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}a'_i + \frac{\partial F^0}{\partial b_i}b'_0 + \frac{\partial F^0}{\partial c_i}c'_0\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0_1}{\partial a_i}a'_i + \frac{\partial F^0_1}{\partial b_i}b'_0 + \frac{\partial F^0}{\partial c_i}c'_0\right) = 0$$

. . . .

Wir sehen, wie auch in dem Falle eines nicht freien Systems die Integralgleichungen eine ganz analoge Form mit derjenigen erhalten haben, in welche *Lagrange* die Differentialgleichungen der Mechanik gebracht hat.

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so kann man die Function S auch so ausdrücken:

$$S = \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]\,dt$$

$$= \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\,dt - ht$$

$$= 2\int_0^t U\,dt + ht,$$

wo h eine willkührliche Constante ist. Ich habe aber im Vorhergehenden den Satz von der lebendigen Kraft nicht benutzt, weil diese Resultate, wie Professor *Hamilton* nicht angemerkt hat, auf einen Fall ausgedehnt werden können, für welchen dieser Satz nicht gilt, auf den Fall nämlich, wo die Kräftefunction außer den Coordinaten noch die Zeit t explicite enthält, wie z. B. wenn ein Punct ohne Masse von beweglichen Centren angezogen wird, deren Bewegung bekannt und gegeben ist. Ich werde diese Ausdehnung der Formeln, wo sie statthaft ist, allezeit angeben, da der angegebene Fall der Mechanik in der That seine Anwendung findet.

2.

Die Definition, welche wir von der Function S gegeben haben, setzt die vollständige Integration der Differentialgleichungen des mechanischen Problems bereits voraus. Die vorstehenden Resultate hätten dann nur das Interesse, das System der Integralgleichungen in eine merkwürdige Form gebracht zu haben. Man kann aber noch die Function S auf eine ganz verschiedene, und viel allgemeinere Art definiren. Ich werde mich im Folgenden auf den Fall eines ganz freien Systems beschränken; den Fall, wo irgend welche Verbindungen und Bedingungen zwischen

den Puncten Statt finden, werde ich in einer spätern Abhandlung wieder aufnehmen, deren hauptsächlichste Resultate ich bereits an einem andern Ort mitgetheilt habe.

Wir betrachten S wieder als Function der Zeit, der Coordinaten der Puncte und ihrer Anfangswerthe. Differentiiren wir S vollständig nach der Zeit, indem wir auch die Coordinaten als Functionen der Zeit betrachten, so erhalten wir, der Definition von S zufolge:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial S}{\partial z_i}z'_i\right) = U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Hieraus folgt, da

$$x'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i},$$

der Ausdruck des partiellen Differentiales von S nach t genommen

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

welcher Ausdruck sich, wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, in folgenden vereinfacht,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h,$$

wo h eine willkührliche Constante ist.

Man erhält aus dem Ausdrucke von $\frac{\partial S}{\partial t}$ auch folgende Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

und dieses ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die Function S Genüge leisten mufs. Die Function S, wie sie oben definirt worden, ist eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, indem sie aufser einer Constante, die man offenbar zu ihr noch hinzufügen kann (da nicht die Function selber, sondern nur ihre Differentialquotienten in der Gleichung vorkommen), $3n$ willkührliche Constanten, nämlich die Anfangswerthe der Coordinaten enthält, und die Zahl der unabhängigen Variabeln ebenfalls $3n+1$ beträgt. Ich will einen Augenblick bei der Natur der verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung verweilen.

Man nennt nach *Lagrange* vollständige Lösung einer partiellen nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung eine solche, welche eine gleiche Zahl willkührlicher Constanten enthält, wie die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt, weil man vermittelst der, nach diesen genomme-

nen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function eine solche Zahl willkührlicher Constanten eliminiren kann, und im Allgemeinen keine gröfsere. Kennt man eine vollständige Lösung, so kann man daraus alle übrigen Lösungen ableiten, deren die partielle Differentialgleichung fähig ist, und welche einen sehr verschiedenen Charakter haben. Man nimmt zu diesem Ende eine Anzahl willkührlicher Relationen zwischen den willkührlichen Constanten an, oder was dasselbe ist, bestimmt einige derselben als willkührliche Functionen der übrigen, differenzürt nach diesen, als unabhängig betrachteten willkührlichen Constanten die vollständige Lösung, und setzt die genommenen partiellen Differentialquotienten einzeln $=0$; wenn man dann vermittelst dieser Gleichungen die willkührlichen Constanten aus der vollständigen Lösung eliminirt, so erhält man die neue Lösung, welche man, da sie willkührliche Functionen enthält, nach *Lagrange* eine allgemeine Lösung nennen kann. Diese allgemeinen Lösungen haben aber einen ganz verschiedenen Character nach der Zahl der willkührlichen Relationen, welche man zwischen den willkührlichen Constanten annimmt. Wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln und also auch die Zahl der willkührlichen Constanten ist, so hat man $m-1$ Classen allgemeiner Lösungen, je nachdem man $1, 2, \ldots$ oder $m-1$ Relationen zwischen den m Constanten annimmt, und dann wie oben verfährt. Die allgemeinste Lösung ist diejenige, bei welcher nur eine Relation zwischen den Constanten angenommen, oder eine als Function der übrigen angesehen wird. Der Grad der Allgemeinheit verringert sich mit der Zahl derjenigen willkührlichen Constanten, für die man willkührliche Functionen der übrigen setzt. So ist es allgemeiner oder läfst mehr willkührliches zu, eine willkührliche Constante als willkührliche Function der $m-1$ andern anzunehmen wie in der allgemeinsten Lösung, als zwei willkührliche Constanten als willkührliche Functionen der $m-2$ andern anzunehmen, wie in der nächst folgenden Classe allgemeiner Lösungen. Denn denkt man sich eine willkührliche Function von $m-1$ Gröfsen nach den Potenzen von einer derselben geordnet, so sind die Coëfficienten willkührliche Functionen von $m-2$ Gröfsen, so dafs eine willkührliche Function von $m-1$ Gröfsen unendlich viele Functionen von $m-2$ Gröfsen umfafst. Als Grenze dieser Classen allgemeiner Lösungen ist der Fall anzusehen, wo man m Relationen zwischen den m Gröfsen annimmt, oder diese als Constanten betrachtet, was aber die vollständige Lösung selber ist,

Da die verschiedenen Arten Lösungen, welche ich allgemeine Lösungen genannt habe, willkührliche Functionen enthalten, so kann man sie so particularisiren, dafs sie jede beliebige Zahl willkührliche Constanten enthalten, denn in jeder willkührlichen Function kann man so viel willkührliche Constanten anbringen, wie man will. Giebt man den willkührlichen Functionen zusammen m willkührliche Constanten, wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln in der partiellen Differentialgleichung ist, so kann man jede particularisirte allgemeine Lösung mit m willkührlichen Constanten ebenfalls als eine vollständige Lösung ansehn, aus welcher man eben so wie aus der vollständigen Lösung, von welcher man ausgegangen ist, alle Arten Lösungen, deren die gegebene partielle Differentialgleichung fähig ist, ableiten kann. Man kann auf ähnliche Art jede allgemeine Lösung so particularisiren, dafs daraus eine Lösung wird, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört. Hat man z. B. eine Lösung, in welcher k Gröfsen als willkührliche Functionen der $m-k$ andern vorkommen, und ist $l>k$, aber zugleich $l<m$, so kann man diese k willkührlichen Functionen von $m-k$ Gröfsen so particularisiren, dafs darin so viel willkührliche Functionen von $m-l$ Gröfsen vorkommen, wie man will; und nimmt man für diese k willkührliche Functionen particuläre Formen, in denen l willkührliche Functionen von $m-l$ Gröfsen vorkommen, so kann man diese Lösung als eine solche betrachten, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört, und die man aus der vollständigen Lösung erhalten kann, wenn man darin l willkührliche Constanten als willkührliche Functionen der übrigen betrachtet, und für diese solche Functionen setzt, dafs die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der vollständigen Lösung verschwinden.

3.

Nachdem ich diese bekannten Betrachtungen vorausgeschickt habe, kehre ich zu der hier vorliegenden partiellen Differentialgleichung zurück:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]=U,$$

von welcher die Function S, wie sie oben definirt worden ist, wenn man noch eine willkührliche Constante zu ihr addirt, ein vollständiges Integral ist. Da es aber unendlich viele vollständige Integrale derselben partiellen

Differentialgleichung von der verschiedensten Form giebt, so ist die Function S durch die partielle Differentialgleichung, der sie Genüge leistet, noch nicht bestimmt. Gleichwohl ist das System der $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichung der Bewegung durch die eine partielle Diffentialgleichung vollständig ersetzt. Denn es läfst sich leicht zeigen, dafs jede vollständige Lösung derselben hinreicht, um sämmtliche Integralgleichungen der Bewegung daraus abzuleiten.

In der That sei S irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]=U,$$

Da die Zahl der unabhängigen Variabeln hier $3n+1$ ist, nämlich die Zeit t und die $3n$ Coordinaten, so mufs die vollständige Lösung $3n+1$ willkührliche Constanten enthalten, von denen man sich immer eine mit S durch blofse Addition verbunden denken kann. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots \alpha_{3n}$, die $3n$ übrigen, und $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_{3n}$, andere willkührliche Constanten, so will ich zeigen, dafs folgende $3n$ endliche Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit t,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots.\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}=\beta_{3n}$$

immer dem vorgelegten System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

Genüge leisten.

Differenzirt man nämlich die gegebenen endlichen Gleichungen, wodurch die willkührlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_{3n}$, von selber verschwinden, so erhält man die $3n$ Gleichungen:

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\partial z_i}z_i'\right)$$

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\partial z_i}z_i'\right)$$

. . . .

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial z_i}z_i'\right),$$

aus welchen man die Werthe von x_i', y_i', z_i' durch Auflösung bestimmen kann. Vergleicht man aber diese $3n$ Gleichungen mit folgenden

$3n$ identischen Gleichungen, welche aus der gegebenen Gleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right],$$

durch partielle Differentiation nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{3n}$ hervorgehn,

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2 \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

. . . .

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial t} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n} \partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

so sieht man ohne weiteres, daſs die gesuchten Werthe von x'_i, y'_i, z'_i, welche die obigen Gleichungen erfüllen sollen, folgende sind:

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y'_i = \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z'_i = \frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen auſs neue, so erhält man die Gleichungen:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k}x'_k + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_k}y' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial z_k}z'_k\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t},$$

$$m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial x_k}x'_k + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_k}y'_k + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial z_k}z'_k\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial t},$$

$$m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial x_k}x'_k + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial y_k}y'_k + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_k}z'_k\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial t},$$

wo man in den Summen rechts für k die Werthe 1, 2, ... n zu setzen hat, während i unverändert bleibt. Wenn nun in diese Gleichungen für x'_k, y'_k, z'_k die gefundenen Werthe substituirt, so verwandeln sie sich in folgende:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t},$$

$$m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial t},$$

$$m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial t}.$$

Es sind aber die Ausdrücke rechts die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_k}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t},$$

nach x_i, y_i, z_i genommen, wodurch wir die Differentialgleichungen bekommen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die vorgelegten Differentialgleichungen sind. Wir haben also folgendes Theorem.

Theorem.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systemes von n materiellen Puncten folgende $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo U eine gegebene Function der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ $\ldots x_n, y_n, z_n$ und der Zeit t bedeutet, und für i alle Werthe $1, 2, \ldots n$ zu setzen sind; es sei ferner S irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2 \right],$$

welches aufser einer mit S blofs durch Addition verbundenen willkührlichen Constanten noch $3n$ andre willkührliche Constanten

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \alpha_{3n}$$

enthalte: so sind die vollständigen endlichen Integrale der vorgelegten $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit $6n$ willkührlichen Constanten:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

wo die Gröfsen

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots \ \beta_{3n}$$

neue $3n$ willkührliche Constanten sind; es sind ferner die nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten,

$$x_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

4.

Eine der vollständigen Lösungen der im Vorigen betrachteten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist die zu Anfang definirte Function S, und zwar eine solche, in welcher die $3n$ willkührlichen Constanten, die S enthält, gerade die Anfangswerthe der $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i sind, welche wir mit a_i, b_i, c_i bezeichnet haben. Für den hauptsächlich vorkommenden Fall, welchen *Hamilton* allein betrachtet, wo die Kräfte-

function die Zeit t nicht explicite enthält, giebt derselbe noch eine zweite partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher diese Function S Genüge leistet. Für diesen Fall gilt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen man so darstellen kann:

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2),$$

wo wieder a_i', b_i', c_i' die Anfangswerthe von x_i', y_i', z_i' bedeuten, und U_0 der Werth von U ist, wenn man darin für x_i, y_i, z_i ihre Anfangswerthe a_i, b_i, c_i setzt. Es ist aber:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

und daher, wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, auch

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2).$$

Für die *Hamilton*'sche Function S wurde aber

$$m_i a_i' = -\frac{\partial S}{\partial a_i}, \quad m_i b_i' = -\frac{\partial S}{\partial b_i}, \quad m_i c_i' = -\frac{\partial S}{\partial c_i},$$

wodurch sich die vorstehende Gleichung in folgende verwandelt,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right].$$

Dieses ist die zweite partielle Differentialgleichung, welcher die *Hamilton*sche Function S Genüge leistet, und wodurch sie von allen andern vollständigen Lösungen der ersten unterschieden wird. Aber wir haben gesehen, dafs jede vollständige Lösung dieser ersten durchaus hinreichend ist, um die sämmtlichen vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen der Bewegung zu finden.

Ich weifs daher nicht, warum *Hamilton*, um die vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen angeben zu können, die Erfindung einer Function S, von $6n+1$ Variabeln, nämlich den $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i, den $3n$ Gröfsen a_i, b_i, c_i und der Gröfse t fordert, welche zu gleicher Zeit den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0,$$

Genüge leistet, während es, wie wir gesehen haben, vollkommen hinreicht, irgend eine Function der $3n+1$ Gröfsen t, x_i, y_i, z_i zu kennen, welche der einen Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]=U$$

Genüge leistet, und außer einer mit ihr durch Addition verbundenen noch $3n$ andere willkührliche Constanten enthält. *Hamilton* scheint mir dadurch seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt zu haben, außerdem daß sie dadurch zu gleicher Zeit unnöthig complicirt und beschränkt wird. Auch ist hier der Übelstand, daß, da man eine Function nicht durch zwei partielle Differentialgleichungen definiren kann, denen sie gleichzeitig genügen soll, ohne zu beweisen, daß eine solche Function auch wirklich möglich ist, seine Theorie, wie er es ausgesprochen hat, nicht an sich, sondern nur mit dem Beweise, den er liefert, verständlich sein kann. Wenn dadurch, daß er gerade diese besondere Function S nimmt, die willkührlichen Constanten die Anfangswerthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten werden, so ist dies kein wesentliches Interesse, da die Einführung dieser Constanten die Form der Integralgleichungen in der Regel complicirter machen, auch man die vollständigen Integralgleichungen aus jeder andern Form in diese bringen kann. Vielleicht ist auch *Hamilton* dadurch, daß er immer gleichzeitig zwei partielle Differentialgleichungen vor Augen hat, verhindert worden, die allgemeinen Vorschriften, welche *Lagrange* in den Vorlesungen über die Functionenrechnung für die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln giebt, auf sein Theorem anzuwenden, wodurch ihm, wie ich in einer andern Abhandlung zeigen werde, Resultate von größter Wichtigkeit für die Mechanik entgangen sind. Ich bemerke noch, daß die Forderung, daß die Function S, nachdem sie der ersten partiellen Differentialgleichung genügt, noch der zweiten genügen solle, auch noch dadurch eine Beschränkung herbeiführt, daß sie den Fall ausschließt, wo die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite enthält, weil für diesen die zweite partielle Differentialgleichung nicht mehr gültig ist.

5.

Man kann der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche man das System der Differentialgleichungen der Bewegung ersetzt hat, verschiedene Formen geben, indem man theils für die zu suchende Function eine andere nimmt, theils die Variabeln ändert. *Hamilton* hat

mehrere Beispiele hiervon gegeben, von denen ich hier nur eines auseinandersetzen werde, weil die übrigen von geringerem Interesse zu sein scheinen.

Es sei:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i[x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2]-U=H.$$

Wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so hat man

$$H=h,$$

wo h eine Constante. Es sei die Function S nach der von *Hamilton* gegebenen Definition bestimmt, und zu dem oben gegebenen Ausdruck von $\partial' S$ nach $\frac{\partial S}{\partial t}\partial t$ hinzugefügt, so hat man das vollständige Differential von S, wenn man allen $6n+1$ Gröfsen t, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, die es enthält, unendlich kleine von einander unabhängige Incremente giebt. Da wir

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H$$

fanden, so wird, wenn man sich der Characteristik der Variationsrechnung bedient, diese vollständige Variation von S,

$$\begin{aligned}\delta S=&-H\delta t+\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]\\&-\Sigma m_i[a_i'\delta a+b_i'\delta b+c_i\delta c].\end{aligned}$$

Man setze

$$V=S+H.t,$$

so folgt aus der vorstehenden Variation von S der Ausdruck der Variation von V,

$$\begin{aligned}\delta V=&\,t\delta H+\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]\\&-\Sigma m_i[a_i'\delta a_i+a_i'\delta b_i+c_i'\delta b].\end{aligned}$$

Denkt man sich vermittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]-U=H,$$

die Gröfse t aus S eliminirt, so wird S und mithin auch V eine Function von H, den $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i und den $3n$ Gröfsen a_i, b_i, c_i, und die vorstehende Gleichung giebt den Ausdruck von δV, durch die Variation dieser $6n+1$ Gröfsen. Betrachtet man daher V als Function von H, den Coordinaten x_i, y_i, z_i und ihren Anfangswerthen a_i, b_i, c_i, so werden die partiellen Differentialquotienten von V nach diesen Gröfsen genommen:

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = -m_i a_i',$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = -m_i b_i',$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial c_i} = -m_i c_i'.$$

Diese Werthe geben die partielle Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + H,$$

wo man, wenn U auch t explicite enthält, in U für t das partielle Differentiale $\frac{\partial V}{\partial H}$ zu setzen hat. Wenn aber, wie es insgemein der Fall ist, U nicht t explicite enthält, sondern eine bloſse Function der Coordinaten ist, so enthält die partielle Differentialgleichung das partielle Differential von U nach H genommen gar nicht, weshalb H bei ihrer Integration als Constante betrachtet wird.

Wenn U nicht t explicite enthält, also H eine Constante ist, so hat man, wenn man für S die *Hamilton*'sche Function nimmt,

$$V = S + Ht = \int_0^t [H + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + U]\, dt,$$

oder da

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U,$$

wird

$$V = \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\, dt = 2Ht + 2\int_0^t U\, dt.$$

In demselben Falle, wo H eine Constante ist, erhält man für $t = 0$ auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2) = U_0 + H$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0 + H,$$

welches eine zweite partielle Differentialgleichung ist, welcher die Function V Genüge leistet. *Hamilton* definirt die Function V durch diese beiden partiellen Differentialgleichungen: aber um die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung zu finden, reicht es wieder vollkommen hin, wenn man nur irgend ein vollständiges Integral V der erstern kennt.

Wenn nämlich U die Gröfse t explicite enthält, so betrachte man irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U-H,$$

wo, wie erwähnt, in U für t zu setzen ist $\frac{\partial V}{\partial H}$. Solche Lösung wird, da hier $3n+1$ unabhängige Variabeln sind, aufser einer mit V durch Addition verbundenen Constante, noch $3n$ andere $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3n}$, enthalten. Die $3n$ endlichen vollständigen Integrale des Systems von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

mit $6n$ willkührlichen Constanten, werden dann

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \dots\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_{3n}}=\beta_{3n},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{3n}$ die neuen $3n$ willkührlichen Constanten sind; die $3n$ Zwischenintegrale mit nur $3n$ willkührlichen Constanten werden ferner,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_ix_i',\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=m_iy_i',\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=m_iz_i'.$$

Die Gröfse H kann man in diesen Gleichungen vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial H}=t$$

durch t ersetzen. Der Beweis hiervon ist ganz so, wie der für die Function S geführte.

Wenn aber die Function U nicht t explicite enthält, so enthält die partielle Differentialgleichung eine unabhängig Variable weniger, weil H in diesem Falle eine Constante h wird; die Zahl der willkührlichen Constanten einer vollständigen Lösung ist daher, aufser der mit V durch Addition verbundenen nur $3n-1$, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3n-1}$ nennen wollen. Die $3n$ endlichen vollständigen Integralgleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \dots\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_{3n+1}}=\beta_{3n-1}$$

zu denen man noch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t+\tau$$

zu fügen hat, wo $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{3n-1}$, τ neue $3n$ willkührliche Constanten sind, so dafs hier wieder $6n$ willkührliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{3n-1}, h, \tau$ gefunden werden; die

$3n$ Zwischenintegrale endlich werden wieder:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z'_i.$$

Der Beweis, der hier etwas modificirt werden muſs, ist, wie folgt.

Die Differentation der Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1}$$

giebt folgende $3n-1$ Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial z_i} z'_i\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial z_i} z'_i\right) = 0,$$

. . . .

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial z_i} z'_i\right) = 0,$$

durch welche, da in ihnen kein Term vorkommt, welcher nicht in eine der $3n$ Gröſsen x'_i, y'_i, z'_i multiplicirt ist, die Verhältnisse dieser $3n$ Gröſsen bestimmt werden. Differentiirt man die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h$$

nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$, so erhält man die $3n-1$ Gleichungen:

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial y_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial z_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0,$$

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial y_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial z_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0,$$

. . . .

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial y_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial z_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0.$$

Vergleicht man diese $3n-1$ Gleichungen mit den vorigen $3n-1$ Gleichungen, so sieht man zunächst, daſs die $3n$ Gröſsen x'_i, y'_i, z'_i sich respective wie die $3n$ Gröſsen $\frac{\partial V}{m_i \partial x_i}$, $\frac{\partial V}{m_i \partial y_i}$, $\frac{\partial V}{m_i \partial z_i}$ verhalten. Differentiirt man nun ferner die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

so erhält man:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial z_i} z'_i\right] = 1,$$

und wenn man die gegebene partielle Differentialgleichung partiell nach h

differentiirt:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial z_i}z_i'\right]=1.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit einander, so sieht man, dafs wenn sich, wie bewiesen worden, die $3n$ Gröfsen x_i', y_i', z_i' respective wie die $3n$ Gröfsen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ verhalten, die $3n$ Gröfsen x_i', y_i', z_i' den $3n$ Gröfsen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ auch respective gleich sein müssen, welches die $3n$ Gleichungen giebt:

$$x_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad y_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad z_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen aufs neue, und setzt in den Differentialen für x_i', y_i', z_i' die vorstehenden Werthe, so erhält man;

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

in welchen Summen i unverändert bleibt, während k die Werthe $1, 2, \ldots n$ erhält. Die Ausdrücke rechter Hand sind hier die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_k}\right)^2\right]=U-h$$

nach x_i, y_i, z_i genommen. Man kann daher dafür die einfacheren Ausdrücke setzen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die zu beweisenden Gleichungen sind.

In den Anwendungen scheint die Function S dann vorzugsweise brauchbar, wenn die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite involvirt. Dagegen bietet die Function V und die gleichzeitige Einführung der Gröfse H statt der Zeit t grofse Vortheile in dem häufiger vorkommenden Fall, wo U eine blofse Function der Coordinaten ist. Denn da in diesem letztern Falle, vermittelst des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft H eine Constante wird, so enthält die partielle Differentialgleichung eine Variable und die zu suchende vollständige Lösung eine willkührliche Con-

stante weniger. Die Function V, welche *Hamilton* zur Erfindung der vollständigen Integralgleichungen der Bewegung fordert, und welche gleichzeitig zweien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen muſs, hat daher hier noch den wesentlichen Nachtheil, daſs sie eine Gröſse mehr als nöthig ist enthält, nämlich auſser h und den $3n$ Coordinaten noch ihre $3n$ Anfangswerthe, während man nur irgend eine Lösung der einen partiellen Differentialgleichung braucht, welche auſser h und den $3n$ Coordinaten $3n-1$ willkührliche Constanten enthält.

6.

Wenn die Kräftefunction die Zeit t nicht explicite enthält, so kann man aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Gröſse t leicht herausschaffen, indem man sie als ein System von $6n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Variabeln x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i darstellt. Nennt man nämlich $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ die Coordinaten der n Puncte, $q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$ ihre nach den Coordinaten-Achsen zerlegten und respective mit ihrer Masse multiplicirten Geschwindigkeiten, so kann man die Differenzialgleichungen der Bewegung:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

durch die Proportion darstellen:

$$dq_1 : dq_2 \ldots : dq_{3n} : dq'_1 : dq'_2 \ldots : dq'_{3n} =$$
$$\frac{1}{\mu_1} q'_1 : \frac{1}{\mu_2} q'_2 \ldots : \frac{1}{\mu_{3n}} q'_{3n} : \frac{\partial U}{\partial q_1} : \frac{\partial U}{\partial q_2} \ldots : \frac{\partial U}{\partial q_{3n}},$$

wo von den Gröſsen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{3n}$ je drei, die sich auf Coordinaten eines Punctes beziehn, der Masse dieses Punctes gleich zu setzen sind. Diese Proportion vertritt die Stelle von $6n-1$ Gleichungen; die Zahl dieser Gleichungen, so wie der Variabeln, kann aber noch um eine verringert werden, wenn man durch den im gedachten Falle geltenden Satz der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} q'^2_1 + \frac{1}{\mu_2} q'^2_2 \ldots + \frac{1}{\mu_{3n}} q'^2_{3n}\right) = U + h$$

eine der Variabeln eliminirt. Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt, und dadurch alle $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$ durch eine von ihnen, z. B. q_1 ausgedrückt, so erhält man schlieſslich die Zeit durch eine Quadratur, vermittelst der Gleichungen:

$$dt = \mu_1 \frac{dq_1}{q'_1}, \quad t = \mu_1 \int \frac{dq_1}{q'_1}.$$

Um die von *Hamilton* angegebene Function V zu finden, braucht man diese Quadratur nicht auszuführen, sondern erhält sie ohne t zu kennen, unmittelbar durch eine Quadratur, wenn man die $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots \ldots q_{2n}, q'_1, q'_2, \ldots . q'_{3n}$ durch eine von ihnen ausgedrückt hat. Man kann nämlich die Function

$$V = \int_0^t \Sigma m_i [x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]\, dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 \ldots . + \frac{1}{\mu_{3n}} q_{3n}'^2\right) dt$$

auch so darstellen

$$V = \int (q'_1 dq_1 + q'_2 dq_2 \ldots . + q'_{3n} dq_{3n}),$$

aus welchem Ausdruck t ganz herausgegangen ist. Wenn q_1^0 den Werth von q_1 für $t = 0$ bedeutet, so dafs

$$t = \int_{q_1^0}^{q} \frac{\mu_1 dq_1}{q'_1},$$

so hat man das Integral für V ebenfalls so zu nehmen, dafs es für $q_1 = q_1^0$ verschwindet.

Das für t angegebene Integral ist das partielle Differential des für V gefundenen, nach h genommen, wie sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t$$

ergiebt. Durch solche partielle Differentiation eines Integrals nach einer Constante kommt man in der Regel wieder auf ein neues Integral. Es giebt aber einen sehr bemerkenswerthen Fall, welcher auch unter andern der Fall des Weltsystems ist, in welchem beide Integrale t und V unmittelbar auf einander zurückgeführt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Kräftefunction eine homogene Function der Coordinaten ist.

Es sei die Kräftefunction U eine Function der $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i von der Dimension ε, so hat man bekanntlich:

$$\Sigma \left[x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i}\right] = \varepsilon U,$$

und daher vermittelst der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\Sigma m_i \left[x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + z_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right] = \varepsilon U.$$

Der Ausdruck linker Hand wird ein vollständiges Differential, wenn man dazu die lebendige Kraft

$$\Sigma m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{dz_i}{dt}\right] = 2U + 2h$$

addirt. Man erhält dann durch Integration von $t = 0$ bis $t = t$:

$$\Sigma m_i [x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i] - \Sigma m_i [a_i a'_i + b_i b'_i + c_i c'_i] = (2+\varepsilon) \int_0^t U dt + 2ht.$$

Es ist aber anderseits:

$$V = \int_0^t \Sigma m_i [x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2] dt = 2\int_0^t U dt + 2ht,$$

und daher

$$\Sigma m_i [x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i'] - \Sigma m_i [a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i'] = \frac{2+\varepsilon}{2} . V - \varepsilon h t,$$

welches die Gleichung ist, vermittelst welcher die Functionen V und t auf einander zurückgeführt werden. Man kann aus dieser Formel, da der Theil linker Hand ein vollständiges Differential ist, auch noch das abermalige Integral

$$\int V dt$$

finden. Setzt man

$$R = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad R' = \frac{dR}{dt},$$

und nennt R_0, R_0' die Anfangswerthe von R, R', so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$R' - R_0' = (2+\varepsilon) V - 2\varepsilon h t,$$

woraus durch Integration:

$$R' - R_0 - R_0' t = (2+\varepsilon) \int_0^t V dt - \varepsilon h . t^2.$$

Für den Fall des Weltsystems ist die Kräftefunction U von der Dimension -1, und daher $\varepsilon = -1$. Man hat daher für diesen Fall:

$$R' - R_0' = V + 2ht.$$

Wenn die Kräftefunction von der Dimension -2 ist, so kann man vermittelst der vorstehenden Formeln nicht mehr die Function V auf die Function t zurückführen, weil dann $\varepsilon = -2$, und daher der in V multiplicirte Term verschwindet. In diesem besonderen Falle hat man aber zwei neue Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$R' - R_0' = 4ht, \quad R - R_0 - R_0' t = 2ht^2,$$

welche zwei willkührliche Constanten R_0, R_0' enthalten. Es ist dies der Fall, wenn das System materieller Puncte gegenseitigen Anziehungen unterworfen ist, die sich wie die Kuben der Distanzen verhalten.

Setzt man für t den Ausdruck

$$t = \frac{\partial V}{\partial h},$$

so hat man nach den obigen Formeln:

$$R' - R_0' = (2+\varepsilon) V - 2\varepsilon h \frac{\partial V}{\partial h},$$

woraus durch Integration nach h:

$$\int h^{-\frac{2+3\varepsilon}{2\varepsilon}}(R'-R'_0)\partial h = -2\varepsilon h^{-\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} V + K,$$

wo K eine von h unabhängige Gröfse ist. Kennt man daher V für einen speciellen Werth von h, z. B. für $h=0$, so kann man V auch durch Integration nach h finden. Ist $\varepsilon = -1$, so wird die obige Formel:

$$\int (R'-R'_0)\frac{\partial h}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}.V + K.$$

Es mufs hier $R'-R'_0$ durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und durch h ausgedrückt, und bei der Integration blofs h als variabel gesetzt werden.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch folgende Bemerkungen hinzufügen. Man erhält aus den obigen Formeln das zweite Differentiale von R, nach der Zeit genommen, durch die Kräftefunction ausgedrückt vermittelst der Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = (2+\varepsilon)U + 2h,$$

oder wenn $\varepsilon = -1$,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = U + 2h.$$

Nach einer bekannten, von *Lagrange* öfters angewandten algebraischen Umformung kann, wenn M die Summe der Massen, X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunctes bedeuten, oder

$$MX = \Sigma m_i x_i, \quad MX = \Sigma m_i y_i, \quad MY = \Sigma m_i z_i$$

die Gröfse MR folgendermafsen ausgedrückt werden,

$$MR = \Sigma m_i \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$= \Sigma m_i m_k [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2] + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

oder, wenn $r_{i,k}$ die Distanz der Massen m_i und m_k bedeutet,

$$MR = \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

wo man die Summe auf je zwei Puncte des Systems auszudehnen hat. Der Schwerpunct eines Systems Körper, welche nur ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind, bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie, so dafs

$$X = \alpha t + \beta, \quad Y = \alpha' t + \beta, \quad Z = \alpha'' t + \beta.$$

Man erhält daher für diesen Fall, wenn

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

vermittelst der angegebenen Umformung von MR die Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma . m_i m_k r_{i,k}^2}{dt^2} = MU + 2Uh - U^2\gamma^2.$$

wo γ die Geschwindigkeit des Schwerpunctes bedeutet. Substituirt man den für das *Newton*sche Attractionsgesetz Statt findenden Ausdruck der Kräftefunction U, wie wir ihn oben gegeben haben, so hat man:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - M\gamma^2$$

oder, da nach dem Satze von der lebendigen Kraft:

$$\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - 2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} = 2h,$$

die Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{M}\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - M(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

ist gleich der Summe der Massen des Systems respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Distanz von seinem Schwerpunct. Man beweist dies aus der vorstehenden Gleichung, indem man den Anfangspunct der Coordinaten im Schwerpunct annimmt, wodurch $X = Y = Z = 0$. Eben so beweist man, dafs

$$\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2$$

die relative lebendige Kraft um den Schwerpunct ist, d. i. die Summe der Masse des Systems, respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit um seinen Schwerpunct. Wenn das System stabil ist, so darf der Ausdruck:

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2,$$

während t ins Unendliche wächst, weder unendlich noch 0 werden; woraus leicht folgt, dafs sein zweites Differential von keiner Zeit an immer dasselbe Zeichen behalten darf. Die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$$

lehren also, dafs, wenn die Bewegung um den Schwerpunct des Systems stabil sein soll, 1) die Constante $2h - M\gamma^2$ negativ sein mufs, d. h. weil

$$2h - M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - 2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

dafs die relative lebendige Kraft um den Schwerpunct immer kleiner bleiben mufs, als die doppelte Kräftefunction;

2) dafs die relative lebendige Kraft um den Schwerpunct abwechselnd immer gröfser und kleiner werden mufs, als die Kräftefunction; dafs die Kräftefunction sowohl als die relative lebendige Kraft abwechselnd gröfser und kleiner werden mufs als die Constante $M\gamma^2 - 2h$.

Wenn man die lebendige Kraft und die Kräftefunction in Reihen nach den Cosinus und Sinus von der Zeit proportionalen Winkeln entwickelt, so mufs, wenn das System stabil sein soll, die Constante $M\gamma^2 - 2h$ der wahre constante Term in beiden Reihen sein. Denn ein von diesem verschiedener Werth des constanten Termes würde in dem Ausdruck von

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$$

Terme erzeugen, die in das Quadrat der Zeit multiplicirt sind, und daher mit der Zeit in's Unendliche wachsen.

7.

Um das Vorhergehende an einem Beispiel zu erläutern, will ich die Function V für einen einfachen und vielbehandelten Fall, die elliptische Bewegung eines Planeten angeben. Da man nach dem sogenannten *Lambert*schen Theorem den Ausdruck der Zwischenzeit t durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten kennt, so kann man dem vorigen §. zufolge auch den Ausdruck für V sogleich ohne eine neue Integration daraus finden. Es sei r der *radius vector*, $r' = \frac{dr}{dt}$, E die excentrische Anomalie, r_0, r'_0, E_0 die Anfangswerthe von r, r', E; es sei ferner k^2 die anziehende Kraft für die Raumeinheit, e die Excentricität, a die halbe grofse Axe. Setzt man mit *Gaufs (Theoria motus pag. 120)*

$$\frac{E-E_0}{2} = g, \quad \frac{E+E_0}{2} = G,$$

und führt einen neuen Hülfswinkel h vermittelst der Gleichung

$$e\cos G = \cos h$$

ein; setzt man ferner:

$$h+g = \varepsilon, \quad h-g = \varepsilon',$$

so wird der Ausdruck der Zwischenzeit:

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} t = \varepsilon - \sin\varepsilon - (\varepsilon' - \sin\varepsilon').$$

Der Satz von der lebendigen Kraft giebt:

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

so daſs die obige Constante h hier $\frac{-k^2}{2a}$ und $\frac{k^2}{r}$ die Kräftefunction U ist. Setzt man daher in der im vorigen §. gefundenen Formel

$$R'-R'_0 = V+2ht,$$

für R, h ihre Werthe,

$$R = r^2, \quad h = \frac{-k^2}{2a},$$

so erhält man

$$V = 2(rr'-r_0 r'_0)+\frac{k^2}{a}.t.$$

Ich habe hier in den Ausdrücken von V, R, h die Masse des bewegten Planeten, die eigentlich als Factor diese Gröſsen afficirt, da sie aus der Rechnung herausgeht, fortgelassen.

Die bekannten Formeln der elliptischen Bewegung geben,

$$rr' = k\sqrt{a}.e\sin E,$$

und daher

$$rr'-r_0 r'_0 = k\sqrt{a}.e(\sin E-\sin E_0)$$

$$= Rk\sqrt{a}.e\sin g\cos G = 2k\sqrt{a}.\sin g\cos h = k\sqrt{a}(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon').$$

Benutzt man diesen Ausdruck und den *Lambert*schen Ausdruck der Zeit t, so erhält man für V einen ganz ähnlichen Ausdruck, wie für t,

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')],$$

welcher sich von dem Ausdrucke von $\frac{k^2}{a}t$ nur in dem Zeichen der Sinus unterscheidet. Nennt man ϱ die Sehne der Bahn, welche den Anfangs- und Endpunct verbindet, so hat man nach den von *Gauſs* am angeführten Orte gegebenen Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a}, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

wo

$$r^2 = x^2+y^2+z^2, \quad r_0^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$
$$\varrho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

Vermittelst dieser Formeln wird V, so wie t, durch die Coordinaten des Anfangspunctes und Endpunctes und die groſse Achse ausgedrückt. Der hier gegebene Ausdruck von V kommt mit demjenigen überein, welchen *Hamilton* auf anderm Wege gefunden hat.

Wenn man in den angegebenen Ausdruck von V alle Gröſsen auſser k und a variirt, so erhält man

$$\delta V = 2k\sqrt{a}[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon-\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon'].$$

Es ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{\delta r+\delta r_0+\delta\varrho}{4a}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon' = \frac{\delta r+\delta r_0-\delta\varrho}{4a}.$$

Bemerkt man daher die Gleichung:

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon-\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{-\sin g}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon+\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{\sin h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

so erhält man

$$\delta V = \frac{k[\sin h\,\delta\varrho-\sin g(\delta r+\delta r_0)]}{2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}.$$

Für den Nenner kann man in diesem Ausdruck zufolge der obigen Formeln auch setzen:

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sqrt{[(r+r_0)^2-\varrho^2)]}}{2\sqrt{a}}.$$

Führt man in diese Formel den von beiden *radii vectores* r und r_0 gebildeten Winkel ein, den wir mit *Gaufs* $2f$ nennen wollen, so hat man:

$$r^2+r_0^2-\varrho^2 = 2rr_0\cos 2f,$$

und daher

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\cos f}{\sqrt{a}}\sqrt{(rr_0)};$$

Hiernach erhalten wir für die Variation von V den Ausdruck:

$$\delta V = \frac{k\sqrt{a}[\sin h\,\delta\varrho-\sin g(\delta r+\delta r_0)]}{\cos f\sqrt{(rr_0)}},$$

in welcher Formel man auch einen der Winkel g, h durch den andern vermittelst der Gleichung

$$\varrho = 2a\sin g\sin h,$$

welche sich aus den obigen Formeln leicht ableitet, ersetzen kann.

Der vorstehende Ausdruck der Variation von V ergiebt sogleich die Werthe der nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten des Anfangs- und Endpunctes. Man erhält nämlich, wenn man ϱ, r, r_0 durch die Coordinaten ausdrückt,

$$x' = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h-\frac{x}{r}\sin g\right],$$

$$y' = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h-\frac{y}{r}\sin g\right],$$

$$z' = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h-\frac{z}{r}\sin g\right],$$

$$x'_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h + \frac{x_0}{r_0}\sin g\right],$$
$$y'_0 = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h + \frac{y_0}{r_0}\sin g\right],$$
$$z'_0 = -\frac{\partial V}{\partial z_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h + \frac{z_0}{r_0}\sin g\right].$$

Nennt man b die halbe kleine Achse, und bemerkt die von *Gaufs* ebenfalls gegebene Gleichung:

$$b\sin g = \sin f\sqrt{(rr_0)},$$

und setzt den halben Parameter $\frac{b^2}{a} = p$, so leitet man aus diesen Formeln auch noch leicht die folgenden ab,

$$x' - x'_0 = -\frac{k\tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}\right),$$
$$y' - y'_0 = -\frac{k\tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}\right),$$
$$z' - z'_0 = -\frac{k\tang f}{\sqrt{p}}\left(\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}\right),$$

woraus nach einigen Reductionen:

$$\sqrt{[(x'-x'_0)^2 + (y'-y'_0)^2 + (z'-z'_0)^2]} = \frac{2k\sin f}{\sqrt{p}},$$

welche Formeln ich ihrer Einfachheit wegen hinzugefügt habe. Ich bemerke noch, dafs die Gröfsen $\frac{x}{r} + \frac{x^0}{r^0}$, $\frac{y}{r} + \frac{y^0}{r^0}$, $\frac{z}{r} + \frac{z^0}{r^0}$ gleich sind der Gröfse $2\cos f$ multiplicirt in die Cosinusse der Winkel, welche die den Winkel der *radii vectores* halbirende Linie mit den Coordinaten-Achsen bildet.

Den für V gefundenen Ausdruck kann man vermittelst der Gleichung

$$t = \frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{\partial V}{\partial . \frac{k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2} . \frac{\partial V}{\partial a}$$

prüfen. Nimmt man die partiellen Differentialen nach a, so erhält man aus dem Ausdrucke

$$V = k\sqrt{a}\,[\varepsilon + \sin\varepsilon - (\varepsilon' + \sin\varepsilon')]$$

die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 2k\sqrt{a}\left[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial a} - \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a}\right] + \frac{1}{2a}V.$$

Aus den Gleichungen

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a}, \qquad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a}$$

folgt aber:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}=\frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{a},\qquad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a}=\frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}{a},$$

wodurch die vorige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=\frac{-k}{\sqrt{a}}(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon')+\frac{V}{2a}=\frac{k}{2\sqrt{a}}[\varepsilon-\varepsilon'-(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon')]=\frac{k^2}{2a^2}t,$$

was zu beweisen war.

Die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines sich gegenseitig anziehenden und von festen Puncten angezogenen Systemes Puncte zurückgeführt werden kann, war

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U+h.$$

Für unsern Fall folgt hieraus die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines Planeten um die Sonne zurückkommt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]=k^2\left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}-\frac{1}{2a}\right]=k^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

Ich will jetzt zeigen, dafs der für V angegebene Ausdruck in der That dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet.

Benutzt man nämlich die oben für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ gefundenen Werthe, und bemerkt die Gleichungen:

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-r_0)=r^2-rr_0\cos 2f,\qquad \sin g\sin h=\frac{\varrho}{2a},$$

so erhält man

$$\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{k^2a}{\cos^2 f.rr_0}\left[\sin^2 h+\sin^2 g-\frac{r-r_0\cos 2f}{a}\right].$$

Es ist aber

$$\sin^2 h+\sin^2 g=2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon'}{2}+\sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$=2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2}+\sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\right]-4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{\varepsilon'}{2},$$

oder nach den oben angegebnen Formeln:

$$\sin^2 h+\sin^2 g=\frac{r+r_0}{a}-\frac{\cos^2 f.rr_0}{a^2},$$

und daher

$$a(\sin^2 h+\sin^2 g)-(r-r_0\cos 2\Phi)=r_0\cos^2 f\left[2-\frac{r}{a}\right],$$

wodurch man erhält:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]=k^2\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right],$$

wie verlangt wurde. Gleichzeitig sehn wir auf diese Weise, dafs die für x', y', z' gegebenen Werthe der Gleichung für die lebendige Kraft genügen.

Für die parabolische Bewegung verschwindet die Constante, die im Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zur Kräftefunction hinzukommt, oder es wird $m = \infty$. Die Winkel ε, ε', h, g werden unendlich klein, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Man erhält daher für diesen Fall aus den obigen Formeln:

$$\sqrt{a}.\varepsilon = \sqrt{(r + r_0 + \varrho)}, \qquad \sqrt{a}.\varepsilon' = \sqrt{(r + r_0 - \varrho)},$$

ferner

$$\sqrt{a^3}[\varepsilon - \sin\varepsilon] = \tfrac{1}{6}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\varepsilon^3 = [r + r_0 + \varrho]^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt{a^3}[\varepsilon' - \sin\varepsilon'] = \tfrac{1}{6}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\varepsilon'^3 = [r + r_0 + \varrho]^{\frac{3}{2}},$$

wodurch die für V und t angegebenen Ausdrücke folgende Form annehmen:

$$V = 2k[\sqrt{(r + r_0 + \varrho)} - \sqrt{(r + r_0 - \varrho)}],$$

$$t = \frac{1}{6k}\left[(r + r_0 + \varrho)^{\frac{3}{2}} - (r + r_0 - \varrho)^{\frac{3}{2}}\right],$$

welches letztere der bekannte Ausdruck der Zeit in der parabolischen Bewegung eines Kometen ist. Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{1}{\sqrt{(r+r_0-\varrho)}} + \frac{1}{\sqrt{(r+r_0+\varrho)}} = A, \qquad \frac{1}{\sqrt{(r+r_0-\varrho)}} - \frac{1}{\sqrt{(r+r_0+\varrho)}} = B,$$

so erhält man hieraus:

$$x' = \frac{\partial V}{\partial x} = k\left[\frac{x - x_0}{\varrho} A - \frac{x}{r} B\right], \qquad x'_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0} = k\left[\frac{x - x_0}{\varrho} A + \frac{x_0}{r_0} B\right],$$

$$y' = \frac{\partial V}{\partial y} = k\left[\frac{y - y_0}{\varrho} A - \frac{y}{r} B\right], \qquad y'_0 = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = k\left[\frac{y - y_0}{\varrho} A + \frac{y_0}{r_0} B\right],$$

$$z' = \frac{\partial V}{\partial z} = k\left[\frac{z - z_0}{\varrho} A - \frac{z}{r} B\right], \qquad z'_0 = -\frac{\partial V}{\partial z_0} = k\left[\frac{z - z_0}{\varrho} A + \frac{z_0}{r_0} B\right].$$

Hamilton giebt den Ausdrücken von t und V noch eine besondere Form, welche ich ebenfalls hersetzen will. Da nämlich ε' aus ε erhalten wird, wenn ich $-\varrho$ statt ϱ schreibe, so kann ich den Werth von V so ausdrücken:

$$V = k\sqrt{a}\int_{-\varrho}^{+\varrho}(1 + \cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}\cdot\partial\varrho,$$

indem ich a, r, r_0 als constant und nur ϱ während der Integration als veränderlich annehme. Da aber

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \varrho}{4a},$$

so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \frac{1}{4a},$$

und daher

$$(1+\cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{2a\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left[\frac{4a}{r+r_0+\varrho}-1\right]}.$$

Hieraus folgt:

$$V = k\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{\frac{1}{2}}\partial\varrho,$$

$$t = \frac{2a^2}{k^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{1}{4k}\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{-\frac{1}{2}}\partial\varrho,$$

welches die von *Hamilton* gegebenen Ausdrücke sind. Setzt man in ihnen $a=\infty$ oder negativ, so erhält man die Formeln für die parabolische oder hyperbolische Bewegung.

8.

Nachdem wir im Vorigen gesehn haben, dafs für den Fall der Bewegung eines freien Systemes von n materiellen Puncten, auf welche nur innere Anziehungs- oder Abstofsungskräfte wirken, das System von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine einzige partielle Differentialgleichung vollkommen ersetzt wird, von welcher man nur irgend eine vollständige Lösung zu kennen braucht, so frägt sich, welche Mittel die heutige Analysis zur Auffindung einer solchen Lösung besitzt, und ob durch solche Zurückführung nach den bisherigen Kenntnissen etwas gewonnen ist.

So viel mir bekannt ist, ist alles wesentliche, was man über die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung weifs, in demjenigen enthalten, was *Lagrange* darüber in seinen Vorlesungen über die Functionenrechnung sagt, und in einer Abhandlung von *Pfaff* in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom J. 1814. *Lagrange* beschränkt seine Untersuchungen auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen d r e i Variabeln, von denen eine als Function der beiden andern, welche als unabhängig betrachtet werden, zu bestimmen ist. Die *Pfaff*sche Methode, welche sich auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen jeder beliebigen Anzahl Variabeln erstreckt, habe ich im 2ten Bande dieses Journals auf eine etwas mehr symmetrische und übersichtliche Art darzustellen gesucht ohne jedoch zu derselben etwas wesentlich neues hinzuzufügen. *Pfaff* verläfst in der angeführten Abhandlung den von *Lagrange* eingeschlagenen Weg, dessen Verfolgung für mehr als drei Variabeln seiner Meinung nach unübersteiglichen Hindernissen unterliegt. Er betrachtet die Aufgabe unter einem

ganz neuen Gesichtspunct als einen besondern Fall einer viel allgemeinern, deren vollständige Lösung ihm gelingt. Es sei nämlich x eine Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_n$, und $p_1, p_2, \ldots. p_n$ ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten, so ist eine Gleichung von der Form

$$0 = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots. p_n)$$

der allgemeinste Ausdruck einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln. Denkt man sich vermittelst dieser Gleichung p_n als Function der übrigen $2n$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots. p_{n-1}$ bestimmt, so kommt es darauf an, die zwischen diesen $2n$ Gröfsen Statt habende Gleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots. + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n$$

durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Ist nämlich x eine Function von $x_1, x_2, \ldots. x_n$, so sind auch seine nach diesen Gröfsen genommenen partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots. p_n$ Functionen derselben, oder es giebt zwischen den $2n+1$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_2, p_2, \ldots. p_n$ eine Anzahl von $n+1$ Gleichungen, von denen eine $\varphi = 0$ gegeben ist, so dafs also, wenn vermittelst dieser letztern Gleichung p_n durch die übrigen Gröfsen ausgedrückt wird, noch n Gleichungen zwischen den $2n$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots. p_{n-1}$ zu finden sind, welche der vorstehenden Differentialgleichung Genüge leisten müssen. *Pfaff* betrachtet die allgemeinste Form einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots. x_{2n-1}$,

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + \ldots. + X_{2n-1} dx_{2n-1},$$

in welcher $X, X_1, \ldots. X_{2n-1}$ beliebige Functionen dieser $2n$ Variabeln sind. Diese reducirt sich auf die vorige für den speciellen Fall, wo

$$X_{n+1} = X_{n+2} \ldots. = X_{2n-1} = 0,$$

wenn man überdies statt $-\frac{X_1}{X}, -\frac{X_2}{X}, \ldots. -\frac{X_n}{X}$ die Gröfsen $p_1, p_2, \ldots. p_n$ schreibt, von denen man $p_1, p_2, \ldots. p_{n-1}$ nebst $x_1, x_2, \ldots. x_{n-1}$ als die unabhängigen Variabeln betrachtet, und p_n als eine gegebene Function derselben, so dafs also die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots. p_{n-1}$ zu gleicher Zeit die Stelle der $n-1$ unabhängigen Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots. x_{2n-1}$ vertreten. *Pfaff* stellt sich zunächst die Aufgabe, die $2n$ Variabeln durch eine derselben, z. B. x_{2n-1} und durch $2n-1$ andere $a_1, a_2, \ldots. a_{2n-1}$ auszudrücken, so dafs, wenn man die gegebene Differentialgleichung

$$
\begin{array}{llllll}
X\,dN = & * & (0,1)dx_1 & + \ldots + (0,2n-1)dx_{2n-1}, \\
X_1\,dN = & (1,0)dx & * & + \ldots + (1,2n-1)dx_{2n-1} \\
X_2\,dN = & (2,0)dx & + (2,1)dx_1 \quad * & + \ldots + (2,2n-1)dx_{2n-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_{2n-1}\,dN = & (2n-1,0)dx & + (2n-1,1)dx_1 & + \ldots + \quad *
\end{array}
$$

Aus diesen Gleichungen findet man die Verhältnisse von dx_1, dx_2, ... dx_{2n-1}. Es sind in ihnen die Verticalreihen und Horizontalreihen der Coëfficienten respective einander gleich, aber entgegengesetzt, da

$$(\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta),$$

nach welcher Regel auch die Terme in der Diagonale alle verschwinden, da

$$(\alpha, \alpha) = 0;$$

ganz wie es der Fall auch in den linearen Gleichungen ist, auf welche *Lagrange* und *Poisson* in ihren Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind. Ich habe in diesem Journal am angeführten Orte einige Betrachtungen über diese Art linearer Gleichungen angestellt, welche sich immer mit großer Leichtigkeit auflösen lassen.

Wenn man für x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n-1} respective p_1, p_2, ... p_{n-1} schreibt, und

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = p_{n-1}, \quad X_n = p_n,$$
$$X = -1, \quad X_{n+1} = X_{n+2} \ldots = X_{2n-1} = 0$$

setzt, so verwandelt sich das aufgestellte System Differentialgleichungen in folgendes:

$$
\begin{aligned}
-dN &= -\frac{\partial p_n}{\partial x}\,dx_n, \\
p_1\,dN &= dp_1 - \frac{\partial p_n}{\partial x_1}\,dx_n, \\
p_2\,dN &= dp_2 - \frac{\partial p_n}{\partial x_2}\,dx_n, \\
&\ldots \\
p_{n-1}\,dN &= dp_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}\,dx_n, \\
p_n\,dN &= \frac{\partial p_n}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p_n}{\partial x_1}\,dx_1 \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1} \\
&\quad + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial p_n}{\partial p_2}\,dp_2 \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\,dp_{n-1},
\end{aligned}
$$

$$0 = -dx_1 - \frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$0 = -dx_2 - \frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = -dx_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man für dN vermittelst der ersten überall dx_n einführt, und in der $(n+1)$ten $dx_1, \ldots dx_{n-1}$, $dp_1, \ldots dp_{n-1}$ vermittelst der übrigen Gleichungen eliminirt:

$$dx_1 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$dx_2 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_{n-1} = -\frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n,$$

$$dp_1 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_1} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_1\right] dx_n,$$
$$dp_2 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_2} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_2\right] dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dp_{n-1} = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_{n-1}\right] dx_n,$$
$$dx = \left[p_n - p_1 \frac{\partial p_n}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial p_n}{\partial p_2} \cdots - p_{n-1} \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\right] dx_n.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\varphi(x, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0$$

ist, so werden

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial p_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}.$$

Die vorstehenden Gleichungen verwandeln sich daher, wenn man der Symmetrie wegen ein neues Differentiale dt einführt, in folgende:

mules (H), on a

$$\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{A_3 A_9}{A_x}\cdot\frac{\sin 8\omega\,.\,\sin 9\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega} = \frac{A_3 A_3}{A_x}\cdot\frac{\sin 4\omega\,.\,\sin 3\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega}.$$

Mais on vient de trouver

$$A_4 = 2^{\frac{1}{2}}\frac{A_2 A_3}{A_1}\sin 3\omega;$$

partant, nous avons

$$\left(\tfrac{2}{3}\right) = 2^{-\frac{1}{2}}.A_4\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega} = A_4\,.\,2^{-\frac{1}{2}}\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega};$$

et comme $\cos 2\omega = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, on peut écrire

$$\left(\tfrac{2}{3}\right) = 2^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{3}\,.\,\frac{A_4}{\sin\omega}.$$

La formule $(\beta''.)$, trouvée dans le § 5., donne

$$\left(\tfrac{2}{3}\right) = 2^{\frac{2}{3}}.\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}.$$

Donc en écrivant x^2 au lieu de x, on aura

$$A_4 = \sin\omega\,.\,2^{\frac{1}{6}}.3^{-\frac{1}{2}}.\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}.$$

Actuellement, si l'on fait ici, $x = (1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; et si, après la transformation, on remplace z par x, on aura:

$$A_4 = \sin\omega\,.\,2^{\frac{1}{6}}.3^{-\frac{1}{2}}.\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}.$$

Cela posé, si l'on fait $x = \sqrt[4]{3}\,.\cot\frac{1}{2}\varphi$; les limites de l'intégration par rapport à φ étant $\varphi = \pi$ et $\varphi = 0$, on obtiendra

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} = 3^{-\frac{1}{4}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{(2-\sqrt{3})}{4}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Mais $\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \sin^2 15^\circ$: donc, conformément à la notation de *Legendre*, on a

$$A_4 = 2^{\frac{1}{6}}.3^{-\frac{3}{4}}.\sin\omega\,.\,F(\sin 15^\circ).$$

Les mêmes formules $(H.)$ donnent

$$\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{A_1 A_4 A_3}{A_2 A_2}\cdot\frac{\sin 6\omega\,.\,\sin 7\omega\,.\,\sin 8\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega\,.\,\sin 3\omega} = \frac{A_1 A_4 A_3}{A_2 A_2}\cdot\frac{\sin 4\omega}{2\sin^2\omega\,.\,\sin 3\omega}.$$

Mais on a trouvé plus haut

$$\frac{A_4 A_3}{A_2 A_2} = 3^{-\frac{1}{4}}.2\sin\omega;$$

partant

$$\left(\tfrac{1}{4}\right) = A_1.3^{-\frac{1}{4}}.\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 3\omega} = 3^{-\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}.A_1.\frac{\sin 4\omega}{\sin 3\omega};$$

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{A_2 A_3 A_4 \dots A_{n-3}}{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-5}} \cdot \frac{\sin 3\omega . \sin 4\omega \dots \sin(n-3)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \dots \sin(n-5)\omega}$$

$$= \frac{A_{n-4} A_{n-3}}{A_1} \cdot \frac{\sin(n-4)\omega . \sin(n-3)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega}$$

$$= \frac{A_4 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 4\omega . \sin 3\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega}.$$

Il suit de là et de la formule $(G.)$, que

$$A_4 A_3 \sin 4\omega . \sin 3\omega = 2^{2-\frac{4}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\omega . \cos\omega;$$

d'où l'on tire

$$A_3 A_2 \sin\omega . \sin 3\omega = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{4}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}.$$

Mais on a trouvé plus haut que,

$$A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{\frac{2}{n}} A_1 \sin\omega;$$

partant l'équation précédente donne

$$A_3 A_2 \sin 3\omega = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{4}{n}+\frac{2}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_1.$$

On a donc ces deux formules générales:

$$H''. \quad A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{\frac{1}{2n}} A_1 \sin\omega, \quad A_{\frac{1}{2}n-2} = 2^{1+\frac{1}{2n}} \frac{A_2 A_3}{A_1} \sin 3\omega.$$

Les formules $(H'.)$ donnent de même:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n}{3}\right) = \frac{A_3 A_4 A_5 \dots A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2 A_3 \dots A_{\frac{1}{2}n-4}} \cdot \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega \dots \sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \dots \sin(\frac{1}{2}n-4)\omega}$$

$$= \frac{A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}n-3)\omega . \sin(\frac{1}{2}n-2)\omega . \sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}$$

$$= \frac{A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\cos 3\omega . \cos 2\omega . \cos\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega};$$

$$\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{A_3 A_4 A_5 \dots A_{n-4}}{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-7}} \cdot \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega \dots \sin(n-4)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \dots \sin(n-7)\omega}$$

$$= \frac{A_{n-6} A_{n-5} A_{n-4}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin(n-6)\omega . \sin(n-5)\omega . \sin(n-4)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}$$

$$= \frac{A_5 A_4 A_3}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin 6\omega . \sin 5\omega . \sin 4\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}.$$

Cela posé l'équation $(G.)$ donne

$$A_5 A_4 A_3 \sin 6\omega . \sin 5\omega . \sin 4\omega = 2^{3-\frac{6}{n}} A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} \cos 3\omega . \cos 2\omega . \cos\omega;$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$A_5 A_4 A_3 \sin 5\omega . \sin 3\omega . \sin\omega = 2^{-\frac{3}{2}-\frac{6}{n}} A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}.$$

Mais, les équations $(H''.)$ donnent

$$A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{1+\frac{4}{n}} A_2 A_3 \sin\omega . \sin 3\omega;$$

Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variabeln besitzen, darin, die Integration dieser partiellen Differentialgleichung wieder auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückzuführen. Ja es ist die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung nach der von mir auseinandergesezten *Pfaff*'schen Theorie nur ein erster Schritt zur Integration der partiellen Differentialgleichung; indem zufolge dieser Theorie nachher noch eine Reihenfolge von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bilden und jedes vollständig zu integriren ist. Man mufs daher im umgekehrten Sinne sagen, dafs es eine wichtige Bemerkung *Hamilton's* ist, dafs die Integration der von ihm aufgestellten partiellen Differentialgleichungen nur auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückkommt, und es keiner weitern Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu bedarf.

Diese Bemerkung *Hamilton's* gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, dafs sie sich mit Leichtigkeit auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnen läfst. In der That wird man, wenn man die *Hamilton*'sche Methode befolgt, wie ich im Folgenden zeigen will, zu dem allgemeinen Resultate gelangen, dafs zur Integration irgend einer partiellen Differentialgleichung zwischen irgend einer Zahl Variabeln die vollständige Integration des von *Pfaff* aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen hinreicht; und man nicht, wie die Methode dieses Analysten fordert, nachher noch eine Reihenfolge anderer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen nach einander vollständig zu integriren hat. Diese Verallgemeinerung findet sich bereits für den Fall, wo die gesuchte Function selber in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommt, in einigen merkwürdigen Formeln *Hamilton*'s, wenn man nur die in diesen Formeln vorkommenden Zeichen nicht, wie *Hamilton* thut, auf die Bedeutung, welche sie in der Mechanik haben, beschränkt.

9.

Es seien wieder $x_1, x_2, \ldots . x_n$ die unabhängigen Variabeln, x eine Function derselben, ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten,

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots . \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

und

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h,$$

wo h eine Constante ist, die gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Um die Integration dieser Gleichung zu bewerkstelligen, stellt *Pfaff* zuerst zwischen den $2n+1$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots \ldots p_n$ folgendes System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung auf:

$$P\frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \qquad -P\frac{dp_1}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$P\frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \qquad -P\frac{dp_2}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$P\frac{dx_n}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, \qquad -P\frac{dp_n}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

wo der Kürze halber:

$$p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots. + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = P$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen folgt identisch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 \ldots. + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}dp_2 \ldots. + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}dp_n = 0,$$

woraus durch Integration $\varphi = h$, so dafs ein Integral dieser Gleichungen die gegebene Gleichung selber ist. Sind die $2n-1$ anderen Integrale

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad \ldots. \quad A_{2n-1} = a_{2n-1},$$

wo $a_1, a_2, \ldots. a_{2n-1}$ willkührliche Constanten sind, welche in den Functionen $A_1, A_2, \ldots. A_{2n-1}$ selber nicht mehr vorkommen, so zeigt *Pfaff*, dafs das vollständige Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung dargestellt wird durch ein System von n Gleichungen zwischen den Functionen $A_1, A_2, \ldots. A_{2n-1}$ mit n willkührlichen Constanten, vermittelst welcher man, mit Hinzuziehung der gegebenen Gleichung $\varphi = h$, die gesuchte Function x nebst ihren partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots. p_n$ durch $x_1, x_2, \ldots. x_n$ ausdrücken kann. Diese n Gleichungen sind so zu bestimmen, dafs sie mit Hülfe der gegebenen Gleichung $\varphi = h$ der einen Differentialgleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots. + p_n dx_n$$

Genüge leisten, welche in dem aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit enthalten ist. Zu diesem Ende drückt *Pfaff* ver-

mittelst der Gleichungen

$$\Phi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ durch $x, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}$ aus, und zeigt, dafs wenn man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n$$

substituirt, diese sich in eine andere

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

verwandelt, in welcher $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{2n-1}$ blofs Functionen von $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}$ sind. Um diese durch ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten zu integriren, mufs er nach einander $n-1$ verschiedene Systeme gewöhnlichen Differentialgleichungen, respective zwischen $2n-2$, $2n-4$, ... und 2 Variabeln vollständig integriren. Die *Hamilton*sche Methode, in der Allgemeinheit, deren sie fähig ist, aufgefafst, lehrt nun, dafs diese Gleichung

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

gar keine weitere Aufstellung von Differentialgleichungen und Integration derselben erfordert, sondern giebt unmittelbar die gesuchten n Gleichunchungen mit n willkührlichen Constanten, welche ihr Genüge thun. Man setze nämlich in den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}, \quad \Phi = h,$$

für $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ die Werthe

$$x = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots\ldots \quad x_n = x_n^0,$$
$$p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \ldots\ldots \quad p_n = p_n^0,$$

so kann man vermittelst dieser $2n-1$ Gleichungen die Gröfsen $x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots\ldots p_n^0$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}$ ausdrücken. Es seien die für $x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots x_n^0$ gefundenen Werthe:

$$x_1^0 = \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}),$$
$$x_2^0 = \Pi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^0 = \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}),$$

so sind die Gleichungen

$$x_1^0 = \Pi_1(A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}),$$
$$x_2^0 = \Pi_2(A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^0 = \Pi_n(A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}),$$

welche man aus den vorstehenden erhält, indem man statt α_1,

$a_2, \ldots . a_{2n-1}$ respective $A_1, A_2, \ldots . A_{2n-1}$ setzt, die gesuchten n Gleichungen zwischen den Gröfsen $A_1, A_2, \ldots . A_{2n-1}$ mit n willkührlichen Constanten $x_1^0, x_2^0, \ldots . x_n^0$, welche mit der gegebenen Gleichung $\Phi = h$ verbunden, der Differentialgleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots . + p_n dx_n$$

oder ihrer transformirten

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 \ldots . + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

Genüge leisten, oder es enthält das System dieser Gleichungen die vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung. Der Beweis hiervon ist folgender.

Vermittelst der Gleichungen

$$\Phi = h, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad \ldots . \quad A_{2n-1} = a_{2n-1}$$

drücke man $x_1, x_2, \ldots . x_n, p_1, p_2, \ldots . p_n$ durch x und $a_1, a_2, \ldots$ ... a_{2n-1} aus, und substituire diese Werthe in die Gleichungen:

$$P\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \qquad -P\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_1,$$

$$P\frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \qquad -P\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_2,$$

$$\ldots \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots$$

$$P\frac{\partial x_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, \qquad -P\frac{\partial p_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_n,$$

welche dadurch identisch werden müssen, eben so wie die aus ihnen folgende Gleichung:

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} \ldots . + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x}.$$

Nimmt man von dieser letzten das partielle Differentiale nach einer der willkührlichen Constanten α, so erhält man, wenn man mit P multiplicirt und zugleich die übrigen Gleichungen benutzt:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \ldots . + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha}$$
$$+ P\left[p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha \, \partial x} + p_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha \, \partial x} + \ldots . + p_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial \alpha \, \partial x}\right].$$

Nimmt man auch das partielle Differentiale nach α von der Gleichung

$$\Phi = h,$$

so erhält man

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial\alpha}$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial\alpha},$$

oder, wenn man die gegebenen Differentialgleichungen zu Hülfe ruft,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial\alpha} =$$
$$P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + \frac{\partial p_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right]$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right].$$

Dieses in die obige Gleichung substituirt, giebt

$$0 = P\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right]}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right],$$

woraus durch Integration nach x, von $x=0$ an genommen,

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha} = M\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha}\dots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha}\right],$$

wenn der Kürze halber

$$M = e^{-\int_0^x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P}}$$

gesetzt wird, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Betrachtet man die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}$ ebenfalls als veränderlich, wie sie durch die Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \dots A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

bestimmt werden, so hat man

$$dx - [p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \dots + p_n dx_n)$$
$$= dx\left[1 - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}\dots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial x}\right]$$
$$-\Sigma\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}\right]d\alpha_i,$$

wenn man dem i unter dem Summenzeichen die Werthe $1, 2, \dots 2n-1$ giebt. Diese Gleichung verwandelt sich, da

$$1 - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}\dots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial x} = 0$$

und für jedes i,

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i} = M\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha_i} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha_i}\dots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha_i}\right]$$

in folgende:

$$dx-[p_1dx_1+p_2dx_2\ldots\ldots+p_ndx_n]=$$
$$-M\Sigma\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha_i}+p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots+p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha_i}\right]d\alpha_i,$$

oder da

$$dx_k^0=\Sigma\frac{\partial x_k^0}{\partial\alpha_i}d\alpha_i,$$

in die Gleichung

$$dx-(p_1dx_1+p_2dx_2\ldots\ldots+q_ndx_n]$$
$$=-M[p_1^0dx_1^0+p_2^0dx_2^0\ldots\ldots+p_n^0dx_n^0].$$

Aus dieser identischen Gleichung folgt, daſs die Gleichuug:

$$dx-[p_1dx_1+p_2dx_2\ldots\ldots+p_ndx_n]=0,$$

in folgende transformirt werden kann:

$$p_1^0dx_1^0+p_2^0dx_2^0\ldots\ldots+p_n^0dx_n^0=0,$$

welche erfüllt wird, wenn man die Gröſsen x_1^0, x_2^0, ... x_n^0 willkührlichen Constanten gleich setzt, was der zu beweisende Satz war.

Die hier angewendete Analysis ist genau dieselbe mit derjenigen, wodurch *Pfaff* in der angeführten Abhandlung beweist, daſs die Verhältnisse der $2n-1$ Gröſsen

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}$$

von x unahhängig sind. Aber er hat nicht die Bemerkung hinzugefügt, daſs aus diesem Grunde diese Gröſsen den Gröſsen

$$p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha_i}+p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots+p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha_i}$$

proportional gesetzt werden können, wodurch man die transformirte Differentialgleichung selber findet, und unmittelbar die n Gleichungen erhält, durch welche sie erfüllt wird. Ich bemerke noch, daſs wenn der im Vorigen dem x gegebene besondere Werth $x=0$ Unbequemlichkeiten verursacht, man dafür jeden andern Zahlenwerth setzen kann.

Wenn man vermittelst der Gleichungen

$$\varphi=h,\quad A_1=\alpha_1,\quad A_2=\alpha_2,\quad\ldots\ldots\quad A_{2n-1}=\alpha_{2n-1}$$

die Gröſsen x_1, x_2, ... x_n, p_1, p_2, ... p_n durch x und α_1, α_2, ... α_{2n-1} ausdrückt, so enthalten diese Ausdrücke auch h. Differentiirt man die Gleichungen:

$$1=p_1\frac{\partial x_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}\ldots\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial x},$$
$$\varphi=h$$

nach h, so erhält man, da vermittelst der aufgestellten Differentialglei-

chungen:

$$P\frac{\partial x_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -P\frac{\partial p_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_i,$$

folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}.\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}.\frac{\partial p_2}{\partial h} \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}.\frac{\partial p_n}{\partial h}$$
$$+ P\left[p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\,\partial h} + p_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial x\,\partial h} \dots + p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial x\,\partial h}\right]$$
$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}.\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}.\frac{\partial p_2}{\partial h} \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}.\frac{\partial p_n}{\partial h}$$
$$-P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}.\frac{\partial x_1}{\partial h} + \frac{\partial p_2}{\partial x}.\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + \frac{\partial p_n}{\partial x}.\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]$$
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots\dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right].$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$0 = 1 + \frac{P\partial\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{MP}$, und integrirt von $x = 0$ bis $x = x$, so erhält man:

$$0 = \int_0^x \frac{\partial x}{MP} + \frac{1}{M}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]$$
$$-\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial h} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial h} \dots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial h}\right].$$

Betrachtet man h auch als veränderlich, so muſs zu dem oben gefundenen Ausdruck von dx,

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \dots + p_n dx_n - M[p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 \dots + p_n^0 dx_n^0]$$

noch der Ausdruck

$$\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]dh - M\left[p_1^0\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2^0\frac{\partial x_2}{\partial h} \dots + p_n^0\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]dh$$
$$= -M\int_0^x \frac{\partial x}{MP}.dh$$

hinzukommen, wodurch man erhält:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \dots + p_n dx_n - M[p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 \dots + p_n^0 dx_n^0]$$
$$+ M\int_0^x \frac{dx}{MP}.dh.$$

Bezeichnet man durch A_i^0 den Ausdruck von A_i und durch Φ^0 den Ausdruck von Φ, wenn man gleichseitig $x = 0$, $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$ setzt,

und eliminirt aus den $2n+1$ Gleichungen

$$\varphi = h,\quad \varphi^0 = h,\quad A_1 = A_1^0,\quad A_2 = A_2^0,\quad \ldots\ldots\quad A_{2n-1} = A_{2n-1}^0$$

die $2n$ Gröſsen $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n, p_1^0, p_2^0, \ldots\ldots p_n^0$, so erhält man x ausgedrückt durch $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots x_n^0, h$, und die nach diesen Gröſsen genommenen partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks von x sind:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1,\qquad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2,\qquad \ldots\ldots\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1^0} = -Mp_1^0,\qquad \frac{\partial x}{\partial x_2^0} = -Mp_2^0,\qquad \ldots\ldots\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n^0} = -Mp_n^0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = M\int_0^x \frac{\partial x}{MP}.$$

In den beiden in diesen Formeln vorkommenden Integralen

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P},\qquad \int\frac{dx}{MP}$$

sind die Gröſsen x_i^0, p_i^0 als Constanten zu betrachten, und vermittelst der vollständigen Integrale der gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen alle Variabeln durch eine auszudrücken.

Ich habe im Vorigen als willkührliche Constanten die Werthe der Variabeln für $x = 0$ angenommen. Man beweist aber eben so, daſs, wenn man vermittelst der vollständigen Integrale der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen sämmtliche Variabeln durch irgend eine von ihnen oder eine beliebige andere Gröſse t ausdrückt, und mit $x^0, x_1^0, \ldots\ldots x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots\ldots p_n^0$ die Werthe von $x, x_1, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ für $t = 0$ bezeichnet und diese Werthe ebenfalls als Variabel setzt: die Gleichung Statt finden wird:

$$dx - p_1dx_1 - p_2dx_2, \ldots\ldots - p_ndx_n$$
$$= M[dx^0 - p_1^0dx_1^0 - p_2^0dx_2^0 \ldots\ldots - p_n^0dx_n^0] + M\int_{x_0}^x \frac{dx}{MP}dh,$$

in welcher wiederum

$$M = e^{-\int_{x_0}^x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P}}.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung, wie es in den Anwendungen auf die Mechanik der Fall ist, die unbekannte Function x nicht enthält, ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

und daher

$$M = 1.$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen reducirt sich dann auf folgendes System:

$$dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 \ldots : dp_n$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots : \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \ldots : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

welches eine Gleichung und eine Variable x weniger enthält. Hat man dieses System vollständig integrirt, und alle Variabeln x_i, p_i durch eine von ihnen, z. B. x_1, und $2n-1$ willkührliche Constanten ausgedrückt, so erhält man x durch eine bloſse Quadratur vermittelst der Gleichung

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P\,dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}},$$

wo α eine neue willkührliche Constante ist, welche in den Ausdrücken von $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ durch x_1 nicht vorkommt. Bedeuten jetzt $x_2^0, x_3^0, \ldots x_1^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ die Werthe, welche diese Ausdrücke für $x = 0$ annehmen, und in welchen ebenfalls α nicht vorkommt, so erhält man, da $x_1^0 = 0$ und $M = 1$, aus der obigen allgemeinen Formel

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n - [p_2^0 dx_2^0 + p_3^0 dx_3^0 \ldots + p_n^0 dx_n^0]$$
$$+ \int_0^{x_1} \frac{\partial x_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}} dh + d\alpha,$$

wo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}$$

gesetzt ist. Diese eine Gleichung giebt:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial x}{\partial x_2^0} = -p_2^0, \quad \frac{\partial x}{\partial x_3^0} = -p_3^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n^0} = -p_n^0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial h} = \int_0^{x_1} \frac{\partial x_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}}.$$

Wenn man durch Einführung eines Elementes dt den gewöhnlichen Differentialgleichungen die Form giebt, die sie in den Problemen der Mechanik haben:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, \qquad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$
$$dt = \frac{dx}{P},$$

so erhält man, nachdem man die Gleichungen

$$dx_1 : dx_2 \ldots\ldots : dx_n : \quad dp_1 : \quad dp_2 \ldots\ldots : \quad dp_n :$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} \ldots\ldots : \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \ldots\ldots : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

vollständig integrirt, und $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ durch x_1 ausgedrückt hat, die Functicnen x, t durch bloſse Quadraturen,

$$x - a = \int_0^{x_1} \frac{P dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}}, \qquad t + \tau = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}},$$

wo a, τ neue willkührliche Constanten sind. Von diesen beiden Integralen ist aber eines das partielle Differentiale des andern nach h genommen. Hat man nämlich durch Integration x gefunden, so hat man den obigen Formeln zufolge:

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}} = t + \tau.$$

Wenn in Φ auſser x noch eine der unabhängigen Variabeln, z. B. x_n fehlt, so erhält man noch $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0$; es gehen daher die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dp_n = 0 \quad \text{oder} \quad p_n = \text{Const.},$$

wodurch sich die Zahl derselben wieder um 2 reducirt. Sie werden nämlich in diesem Falle

$$dx_1 : dx_2 \ldots\ldots dx_{n-1} : \quad dp_1 : \quad dp_2 \ldots\ldots \quad dp_{n-1}$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots\ldots \frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \ldots\ldots -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}},$$

in welchen Ausdrücken man p_n als Constante zu betrachten hat. Hat man durch Integration dieser Gleichungen die Gröſscn $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{-1}$, $p_1, p_2, \ldots\ldots p_{n-1}$ durch eine von ihnen ausgedrückt, so giebt eine der Gleichungen:

$$dx_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dx_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dp_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$$

durch bloſse Quadratur den Werh von x_n. Man kann aber auch in diesem Falle auf ähnliche Art, wie *Hamilton* die Function S durch V ersetzt, allgemein die Gleichung $\varPhi = h$ selber in eine andere transformiren, in welcher die Zahl der unabhängigen Variabeln um eine geringer ist. Wenn nämlich $\varPhi$ weder x noch x_n enthält, so setze man

$$x = y + p_n x_n,$$

wodurch

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} - x_n dp_n.$$

In dieser Gleichung betrachte man p_n als Constante, wodurch sie sich in die Gleichung

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_{n-1} dx_{n-1}$$

verwandelt, so daſs $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ die partiellen Differentialquotienten von y nach $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ genommen werden, und die gegebene partielle Differentialgleichung, in welcher ebenfalls p_n als Constante betrachtet wird, eine partielle Differentialgleichung für y wird mit nur $n-1$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Hat man durch Integration dieser partiellen Differentialgleichung y als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, von $n-1$ willkührlichen Constanten und der Constante p_n gefunden, so findet man die gesuchte Function x dadurch, daſs man in der Gleichung

$$x = y + p_n x_n$$

die Gröſse p_n vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial p_n} = -x_n$$

eliminirt. Man kann x_n um eine willkührliche Constante vermehren, wodurch x, wie es für eine vollständige Lösung nöthig ist, n willkührliche Constanten erhält.

10.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie man durch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen eine vollständige Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung finden kann. Ich will jetzt zeigen, wie man umgekehrt aus irgend einer vollständigen Lösung die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten kann.

Kennt man einen Ausdruck von x durch $x_1, x_2, \ldots x_n$, mit n willkührlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welcher der gegebenen partiellen Differentialgleichung $\varphi = h$ Genüge leistet, so bilde man die $n-1$ Gleichungen, welche sich durch die Proportion darstellen lassen.

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \ldots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 \ldots : \beta_n,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ neue willkührliche Constanten seien, die aber, da nur ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, nur die Stelle von $n-1$ willkührlichen Constanten vertreten. Führt man eine neue Gröfse M ein, so kann man diese Proportion durch das System Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + \beta_1 M = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \beta_2 M = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} + \beta_n M = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind die $n+2$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots x_n, M$ als Functionen von einer unter ihnen gegeben. Differentiirt man eine dieser Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \beta_i M = 0,$$

und setzt für β_i den aus dieser Gleichung gezogenen Werth, so erhält man:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_2} dx_2 \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial x_n} dx_n,$$

oder wenn man

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

setzt, die Gleichung:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} dx_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} dx_2 \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i} dx_n.$$

Die gegebene Differentialgleichung $\varphi = h$ mufs, wenn man darin für x einen gegebenen Werth und die daraus durch partielle Differentiation nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ sich ergebenden Werthe von $p_1, p_2, \ldots p_n$ setzt, eine zwischen den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, h$ identisch Statt findende Gleichung werden. Nimmt man ihr partielles Differential nach α_i, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i}.$$

Vergleicht man die zwei Systeme von n Gleichungen, welche sich aus dieser und der vorhergehenden Gleichung ergeben, wenn man darin für i seine Werthe 1, 2, ... n setzt, so erhält man die Proportion:

$$\frac{dM}{M} : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots : \frac{\partial\varphi}{\partial p_n},$$

welche man auch, da

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n,$$

durch die Gleichungen darstellen kann:

$$P\frac{dM}{M\,dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$P\frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \quad P\frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad P\frac{dx_n}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n},$$

wo wieder

$$P = p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}$$

gesetzt ist. Differentiirt man ferner die Gleichung $\varphi = h$ nach x_i, und setzt in dem Differentiale:

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

so erhält man

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}.\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}.\frac{\partial p_i}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}.\frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

oder wenn man in diese Gleichung die vorhin erhaltenen Werthe

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} = P\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} = P\frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = P\frac{dx_n}{dx}$$

substituirt, die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P\frac{dp_i}{dx}.$$

Wir haben so umgekehrt aus den $2n$ Gleichungen:

$$\varphi = h, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \ldots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 \ldots : \beta_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

die $2a$ Differentialgleichungen

$$P\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, \quad P\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}p_i$$

bgeleitet, und da jene Gleichungen $2n$ willkührliche Constanten, nämlich h, α_1, α_2, ... α_n und die Verhältnisse von β_1, β_2, ... β_n enthalten, so sind sie zugleich die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen.

II.

Man kann die letztere Analysis auch auf die allgemeinere Untersuchung ausdehnen, unter welche *Pfaff* die Integration der partiellen Dif-

ferentialgleichungen erster Ordnung mit einbegreift, und zeigen, dafs wenn irgend ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten gegeben ist, welches der Differentialgleichung.

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

Genüge leistet, man daraus die vollständigen Integrale des von *Pfaff* aufgestellten und oben mitgetheilten Systems von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten kann *). Durch das gegebene System von n Gleichungen drücke man nämlich $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ durch $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots x_{2n}$ und durch die n willkürlichen Constanten, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ nennen wollen, aus, und bilde die Gleichungen:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} + M\beta_1 = 0,$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} + M\beta_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} + M\beta_n = 0,$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$ neue willkührliche Constanten sind, welche aber nur die Stelle von $n-1$ vertreten, da hier allein ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, so werden diese Gleichungen, welche nach Elimination der neu eingeführten Gröfse M die Stelle von $n-1$ Gleichungen vertreten, in Verbindung mit den gegebenen n Gleichungen, die vollständigen Integrale des von *Pfaff* aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein, mit $2n-1$ willkührlichen Constanten, nämlich den n willkührlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots \alpha_n$ und den $n-1$ Verhältnissen der willkührlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$. Man beweist dieses Theorem wie folgt:

Da die durch die gegebenen n Gleichungen bestimmten Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ durch $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots x_{2n}$ und die n willkührlichen Constanten der Gleichung:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

genügen sollen, so mufs man die Gleichungen haben:

*) Statt x in den oben mitgetheilten Formeln ist hier x_{2n} geschrieben.

$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}+X_{n+1}=0,$$
$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}+X_{n+2}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}+X_{2n}=0.$$

Man denke sich jetzt vermittelst der n Gleichungen

$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}+M\beta_i=0$$

die $n+1$ Größen x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n}, M durch eine von ihnen, z. B. durch M, ausgedrückt, wodurch diese Größen und daher auch x_1, x_2, ... x_n Functionen von M, von α_1, α_2, ... α_n, und von β_1, β_2, ... β_n werden. Die auf diese Annahme sich beziehenden partiellen Differentialquotienten werde ich der Unterscheidung wegen in Klammern einschließen, während die partiellen Differentialquotienten ohne Klammern sich auf die Annahme beziehen, daß x_1, x_2, ... x_n als Functionen von x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n}, α_1, α_2, ... α_n betrachtet werden. Man hat demnach:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\dots+X_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}\right)=$$
$$X_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}$$
$$+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}}\dots+X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right]\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$=-M\beta_i-X_{n+1}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \alpha_i}\right)-X_{n+2}\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \alpha_i}\right)\dots-X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$

oder:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\dots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)+M\beta_i=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach M, so erhält man:

$$\frac{dX_1}{dM}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right)+\frac{dX_2}{dM}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\dots+\frac{dX_{2n}}{dM}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$+X_1\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right)+X_2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right)\dots+X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right)+\beta_i=0.$$

Es folgt ferner aus der Gleichung

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots\ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

wenn man alle Gröfsen als Functionen von M betrachtet:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)\ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach α_i, so erhält man:

$$X_1\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial^2 x_{2n}}{\partial M\,\partial \alpha_i}\right)$$

$$+\frac{\partial X_1}{\partial \alpha_i}.\frac{dx_1}{dM} + \frac{\partial X_2}{\partial \alpha_i}.\frac{dx_2}{dM}\ldots\ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial \alpha_i}.\frac{dx_{2n}}{dM} = 0,$$

wodurch sich die obige Gleichung, wenn man sie mit dM multiplicirt, in folgende verwandelt:

$$dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$

$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \alpha_i}\right) + \beta_i\, dM = 0.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung β_i vermittelst der Gleichung:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right) + M\beta_i = 0,$$

so erhält man:

$$dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$

$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$

$$-\frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right)\ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)\right] = 0.$$

Setzt man, wie erlaubt ist, $\beta_n = 1$, so erhält man durch die nämliche Analysis ähnliche Formeln, wie für α_i, auch für die $n-1$ andern willkürlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{n-1}$. Zuvörderst hat man:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)\ldots\ldots + X_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial \beta_i}\right) =$$

$$\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}}\ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \beta_i}\right)$$

$$+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}}\ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \beta_i}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}}\ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right]\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$

$$= -\left[X_{n+1}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \beta_i}\right) + X_{n+2}\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \beta_i}\right)\ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\right],$$

oder

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right).$$

Differentürt man diese Gleichung nach M und die Gleichung

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)$$

nach β_i, und zieht beide Resultate von einander ab, so erhält man nach Multiplication mit dM:

$$0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right) \dots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

von welcher Gleichung wir, um ihr dieselbe Form mit der Gleichung zu geben, die wir in Bezug auf α_i gefunden hatten, die Gleichung:

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

mit $\frac{dM}{M}$ multiplicirt, abziehn wollen, wodurch man erhält:

$$0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right) \dots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\right].$$

Wir wollen in dieser Gleichung, so wie in der oben gefundenen ähnlichen, auf α_i bezüglichen, für die partiellen Differentialen

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i}\right), \quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ihre entwickelten Werthe

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),$$
$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$

setzen, und die Gleichungen nach den Gröfsen

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}\right), \quad \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ordnen, so verwandeln sie sich in folgende:

$$0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),$$
$$0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

wo

$$T_1 = dX_1 - \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}dx_2 \ldots\ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_1}dx_{2n}\right] - \frac{X_1\, dM}{M},$$

$$T_2 = dX_2 - \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}dx_2 \ldots\ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_2}dx_{2n}\right] - \frac{X_2\, dM}{M},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{2n} = dX_{2n} - \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_{2n}}dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_{2n}}dx_2 \ldots\ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_{2n}}dx_{2n}\right] - \frac{X_{2n}\, dM}{M}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx_1, dx_2, ... dx_{2n}, und addirt sie, so heben sich, da

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots\ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}dx_2 \ldots\ldots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}dx_{2n} = dX_k,$$

alle Terme rechter Hand fort, wodurch man die Gleichung erhält:

$$T_1\, dx_1 + T_2\, dx_2 \ldots\ldots + T_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots\ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0,$$

da wir in den vorstehenden Formeln alle Gröfsen x_1, x_2, ... x_{2n} als Functionen blofs von einer Gröfse M, und α_1, α_2, ... α_n, β_1, β_2, ... β_{n-1} als Constanten betrachten, was ich durch den Gebrauch der Charakteristik d andeute. Aus den $2n$ Gleichungen, nämlich den n Gleichungen:

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \ldots\ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right) = 0,$$

den $n-1$ Gleichungen

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \ldots\ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right) = 0$$

und der Gleichung

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots\ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0$$

folgen die $2n$ Gleichungen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad T_{2n} = 0,$$

welche mit den *Pfaff*'schen Differentialgleichungen übereinkommen, wie ich sie oben aufgestellt habe, wenn man in ihnen $\frac{dM}{M}$ statt dN und X_{2n}, x_{2n} für X, x setzt.

Dafs man aus den $2n$ angegebenen Gleichungen die Gleichungen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad T_{2n} = 0$$

folgern kann, läfst sich, wie folgt, beweisen. Man betrachte gleich-

zeitig $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, M$ als Variabeln, so wird durch die zwischen diesen Gröfsen und den $2n$ Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ aufgestellten Gleichungen keine Relation zwischen diesen letztern allein gegeben, sondern sie zeigen nur, wie das eine System von $2n$ Variabeln sich durch das andere System von $2n$ Variabeln ausdrücken läfst. Man bezeichne beliebige Variationen der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ mit $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$, die von einander unabhängig sind, da zwischen den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ selber keine Relation Statt finden soll. Sind $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}, \delta M$ die entsprechenden Variationen der Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, M$, so hat man:

$$\begin{aligned}\delta x_k = &\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)\delta\alpha_2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2}\right)\delta\alpha_2 \ldots + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_n}\right)\delta\alpha_n \\ &+ \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_1}\right)\delta\beta_1 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_2}\right)\delta\beta_2 \ldots + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_{n-1}}\right)\delta\beta_{n-1} \\ &+ \left(\frac{\partial x_k}{\partial M}\right)\delta M.\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die $2n$ Gleichungen, die wir gefunden haben:

$$\begin{aligned}
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_1}\right) = 0,\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_2}\right) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_n}\right) = 0,\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_1}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_1}\right) = 0,\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_2}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_2}\right) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_{n-1}}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_{n-1}}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_{n-1}}\right) = 0,\\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0
\end{aligned}$$

respective mit $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}, \delta M$, und addirt sie, so erhält man:

$$T_1\,\delta x_1 + T_2\,\delta x_2 \ldots + T_{2n}\,\delta_{2n} = 0,$$

welche Gleichung, da $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$ beliebige, von einander unab-

hängige Variationen sind, nicht anders bestehn kann, als wenn

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad T_{2n} = 0,$$

was zu beweisen war.

Daſs man auf die angegebene Art, wenn man der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots\ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

durch irgend ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten genügen kann, immer auch die vollständigen Integrale der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält, läſst sich auch durch folgende Betrachtungen einsehen. Man löse die n Gleichungen nach den n willkührlichen Constanten auf, so daſs sie die Form erhalten,

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad A_n = \alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ die willkührlichen Constanten sind und in $A_1, A_2, \ldots \ldots A_n$ nicht mehr vorkommen. Sollen diese Gleichungen der Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots\ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

genügen, so muſs es n Multiplicatoren $U_1, U_2, \ldots\ldots U_n$ geben, vermittelst welcher identisch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots\ldots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 \ldots\ldots + U_{2n} dA_{2n}$$

wird, da der Ausdruck linker Hand vom Gleichheitszeichen verschwinden soll, wenn $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ willkührliche Constanten werden. Denkt man sich $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ durch $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots x_{2n}$ ausgedrückt, so erhält man hieraus:

$$U_i = X_2 \frac{\partial x_1}{\partial A_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial A_i} \ldots\ldots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial A_i}.$$

Aus der von *Pfaff* selber gegebenen Analysis folgt, daſs wenn man auf irgend eine Art die Gleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots\ldots + X_{2n} dx_{2n}$$

in eine andere zwischen nur $2n-1$ Variabeln transformiren kann, diese willkührlichen Constanten gleich gesetzt, die vollständigen Integrale seiner gewöhnlichen Differentialgleichungen geben. Nun haben wir aber

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots\ldots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 \ldots\ldots + U_n dA_n,$$

oder

$$0 = \frac{U_1}{U_n} dA_1 + \frac{U_2}{U_n} dA_2 \ldots\ldots + \frac{U_{n-1}}{U_n} dA_{n-1} + dA_n,$$

welches eine Differentialgleichung zwischen nur $2n-1$ Variabeln

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n, \quad \frac{U_1}{U_n}, \quad \frac{U_2}{U_n}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ist. Diese willkührlichen Constanten gleich gesetzt, müssen daher die voll-

ständigen Integrale des *Pfaff*schen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein; sie kommen aber genau mit den $2n-1$ Gleichungen überein, wie ich sie oben aufgestellt habe.

12.

Ich habe oben bemerkt, dafs es in der von *Pfaff* zur Integration der Gleichung

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

vorgeschlagenen Methode ein Uebelstand sei, dafs man von den nach einander zu integrirenden Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nur das erste wirklich aufstellen kann, und für die andern Systeme nur die Art angeben kann, wie man sie, wenn man die vorhergehenden vollständig integrirt hat, zu bilden hat. In der That ist klar, dafs es hierdurch unmöglich fällt, das Ganze der Aufgabe zu übersehen. Für den besondern Fall, welcher die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, haben wir gesehen, dafs die Integration des ersten dieser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen ausreicht, und es der Aufstellung und Integration anderer Systeme nicht weiter bedarf. Dieser besondere Fall kann als derjenige bezeichnet werden, in welchen von den $2n$ Gröfsen $X_1, X_2, \dots X_{2n}$ eine Anzahl von $n-1$ gleich 0 ist. Es sei z. B.

$$X_{n+2} = X_{n+3} \dots = X_{2n} = 0,$$

so dafs die zu integrirende Gleichung wird:

$$dx_{n+1} = \frac{-1}{X_n}[X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_n\,dx_n].$$

Man setze:

$$-\frac{X_1}{X_{n+1}} = p_1, \quad -\frac{X_2}{X_{n+2}} = p_2, \quad \dots \quad -\frac{X_n}{X_{n+1}} = p_n,$$

so sind $p_1, p_2, \dots p_n$ die partiellen Differentialquotienten von x_{n+1} als Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ betrachtet, und die Elimination der $n-1$ Gröfsen $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots x_{2n}$ aus diesen n Gleichungen giebt die zu integrirende partielle Differentialgleichung. Ich will jetzt im Folgenden zeigen, dafs wenn man die Methode, welcher wir uns für diesen besondern Fall bedienten, auf die allgemeine *Pfaff*sche Differentialgleichung anwendet, man des oben bezeichneten Uebelstandes ledig werden kann, indem es dadurch gelingt, mit Leichtigkeit alle zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen aufzustellen, ohne eines derselben wirklich integrirt zu haben.

Um hierzu zu gelangen, nehme man in den Integralen des von *Pfaff* aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen als willkührliche Constanten die Werthe, welche $x_1, x_2, \dots x_{2n-1}$ für $x_{2n}=0$ annehmen, und die wir mit $x_1^0, x_2^0, \dots x_{2n-1}^0$ bezeichnen wollen. Bezeichnet man auch die entsprechenden Werthe von $X_1, X_2, \dots X_{2n}$ mit $X_1^0, X_2^0, \dots X_{2n}^0$, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, & X_1 = X_1^0 + x_{2n}\Xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, & X_2 = X_2^0 + x_{2n}\Xi_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}, \end{array}$$

wo $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{2n-1}, \Xi_1, \Xi_2, \dots \Xi_{2n}$ Functionen von $x_{2n}, x_1^0, x_2^0, \dots \dots x_{2n-1}^0$ sind, welche für $x_{2n}=0$ nicht unendlich werden. Substituirt man diese Werthe von $x_1, x_2, \dots x_{2n-1}$, wie sie durch vollständige Integration der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden werden, in die Gleichung:

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n},$$

indem man auch die Gröfsen $x_1^0, x_2^0, \dots x_{2n-1}^0$ als unveränderlich betrachtet, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & [X_1^0 + x_{2n}\Xi_1]\,d[x_1^0 + x_{2n}\xi_1] \\ & + [X_2^0 + x_{2n}\Xi_2]\,d[x_2^0 + x_{2n}\xi_2] \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + [X_{2n-1}^0 + x_{2n}\Xi_{2n-1}]\,d[x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}] \\ & + [X_{2n}^0 \;\; + x_{2n}\Xi_{2n}]\,dx_{2n} \\ = & B\,dx_{2n} + B_1\,dx_1^0 + B_2\,dx_2^0 \dots + B_{2n-1}\,dx_{2n-1}^0, \end{aligned}$$

wo, wenn i eine der Zahlen 1, 2, ... $2n-1$ bedeutet,

$$\begin{aligned} B_i = & X_i^0 + x_{2n}\Xi_i \\ & + x_{2n}\left[X_1^0\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i^0} + X_2^0\frac{\partial\xi_2}{\partial x_i^0} \dots + X_{2n-1}^0\frac{\partial\xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right] \\ & + x_{2n}^2\left[\Xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i^0} + \Xi_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_i^0} \dots + \Xi_{2n-1}\frac{\partial\xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right]. \end{aligned}$$

Aber *Pfaff* hat bewiesen, dafs wenn man vermittelst vollständiger Integration der von ihm aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen die Gröfsen $x_1, x_2, \dots x_{2n}$ durch eine von ihnen, z. B. x_{2n}, und durch die $2n-1$ willkürlichen Constanten ausdrückt, und diese Werthe in den Ausdruck

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

substituirt, indem man die willkührlichen Constanten ebenfalls als verän-

derlich betrachtet, der Coëfficient von dx_n verschwindet, und die Verhältnisse der Coëfficienten der Differentialen der willkührlichen Constanten von x_n unabhängig werden. Da hiernach

$$B = 0,$$

und die Verhältnisse von $B_1, B_2, \ldots B_{2n-1}$ von x_{2n} unabhängig sein werden, so bleiben diese Verhältnisse ungeändert, wenn in $B_1, B_2, \ldots B_{2n-1}$ man $x_{2n} = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$B_1 : B_2 \ldots : B_{2n-1} = X_1^\circ : X_2^\circ \ldots X_{2n-1}^\circ,$$

oder, wenn man einen Multiplicator M einführt,

$$B_1 = MX_1^\circ, \quad B_2 = MX_2^\circ, \quad \ldots \quad B_{2n-1} = MX_{2n-1}^\circ.$$

Wir sehen also, daſs wenn man statt der Variabeln $x_1, x_2, \ldots \ldots x_{2n-1}, x_{2n}$ die Variabeln $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ, x_{2n}$ einführt, vermittelst der Gleichungen

$$x_1 = x_1^\circ + x_{2n}\xi_1, \quad x_2 = x_2^\circ + x_{2n}\xi_2, \quad \ldots \quad x_{2n-1} = x_{2n-1}^\circ + x_{2n}\xi_{2n-1},$$

welche sich durch die vollständige Integration der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben, die vorgelegte Differentialgleichung

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n}$$

sich in die Gleichung

$$0 = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ$$

verwandelt, oder in eine andere Differentialgleichung mit einer Variable weniger, welche aus der gegebenen Differentialgleichung erhalten wird, wenn man in ihr $x_{2n} = 0$ setzt, und $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$ für $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ schreibt. Die Integration dieser letztern Gleichung giebt also die Integration der vorgelegten, wenn man in ihren Integralgleichungen wieder $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$ durch $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}; x_{2n}$ vermittelst der angegebenen Gleichungen ausdrückt.

Nach der *Pfaff*schen Methode hat man nun in der Gleichung

$$0 = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ$$

eine der Gröſsen $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$ einer willkührlichen Constanten gleich zu setzen; es sei also

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

wo α_1 eine willkührliche Constante. Die Differentialgleichung wird demnach

$$0 = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-2}^\circ dx_{2n-2}^\circ,$$

wo in den Gröſsen X_i° für x_{2n-1}° die Constante α_1 zu setzen ist. Hat man

diese neue Differentialgleichung durch $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ willkührlichen Constanten integrirt, so füge man die Gleichung

$$x^0_{2n-1} = \alpha_1$$

hinzu, und drücke vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{2n-1}$ durch $x, x_1, \ldots x_{2n}$ aus, so hat man die n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten, welche der vorgelegten Differentialgleichung

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

Genüge thun.

Man kann auf dieselbe Weise nun wieder die Differentialgleichung, auf welche die vorgelegte reducirt worden ist, auf eine andere mit 2 Variabeln weniger reduciren. Das zu diesem Ende zu integrirende zweite System Differentialgleichungen erhält man aus dem ersten, wenn man die beiden letzten Gleichungen desselben fortläfst, $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$ setzt, und für x_i, X_i schreibt x^0_i, X^0_i. Man erhält dann $2n-3$ gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen den $2n-2$ Variabeln $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{2n-2}$. Als willkührliche Constanten nehme man wieder die Werthe von x^0_1, $x^0_2, \ldots x^0_{2n-3}$ für $x^0_{2n-2} = 0$, welche wir mit $x^{00}_1, x^{00}_2, \ldots x^{00}_{2n-3}$ bezeichnen wollen, und nenne X^{00}_i den entsprechenden Werth von X^0_i, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Gleichung

$$X^{00}_1\,dx^{00}_1 + X^{00}_2\,dx^{00}_2 \ldots + X^{00}_{2n-4}\,dx^{00}_{2n-4} = 0,$$

welche aus der vorgelegten erhalten wird, wenn man $x_{2n} = x_{2n-2} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$ setzt, wo α_1, α_2 willkührliche Constanten bedeuten, und X^{00}, x^{00} für X, x schreibt, durch $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ willkührlichen Constanten zu integriren. Zu diesen füge man die Gleichung

$$x^{00}_{2n-3} = \alpha_2,$$

und drücke $x^{00}_1, x^{00}_2, \ldots x^{00}_{2n-3}$ vermittelst der Integralgleichungen des zweiten Systems durch $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{2n-2}$ aus, füge wieder die Gleichung

$$x^0_{2n-1} = \alpha_1$$

hinzu, und drücke $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{2n-1}$ vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems durch $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ aus, so hat man die n Integrale der vorgelegten Gleichung mit n willkührlichen Constanten. Indem man auf diese Weise fortfährt jede Differentialgleichung, auf welche man die vorgelegte reducirt hat, dadurch noch um 2 Variabeln zu verringern, dafs man eine Variable $=0$, eine andere einer willkührlichen Constante gleich setzt, kommt man zuletzt auf eine Differentialgleichung zwischen

nur 2 Variabeln:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 = 0,$$

wo in X_1, X_2 zu setzen ist $x_{2n} = x_{2n-2} \ldots = x_4 = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$ $\ldots\, x_3 = \alpha_{n-1}$.

Bezeichnet man daher mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ willkührliche Constanten, so besteht das ganze Verfahren zur Aufstellung der verschiedenen zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen im Folgenden. In dem oben aufgestellten ersten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen setzt man $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, läßt die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^0, X_i^0 für x_i, X_i, wodurch man das zweite System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-2}^0 = 0$, $x_{2n-3}^0 = \alpha_2$, läßt wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{00}, X_i^{00} für x_i^0, X_i^0, wodurch man das 3te System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-4}^{00} = 0$, $x_{2n-5}^{00} = \alpha_3$, läßt wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{000}, X_i^{000} für x_i^{00}, X_i^{00}, wodurch man das 4te System Differentialgleichungen erhält, und so fort; zuletzt kommt man auf die Gleichung, welche das $n$te System vorstellt,

$$X_1^{0^{n-1}}\,dx_1^{0^{n-1}} + X_2^{0^{n-1}}\,dx_2^{0^{n-1}} = 0.$$

Läßt man $x_1^{0^{n-m}}$, $x_2^{0^{n-m}}$, $\ldots\, x_{2m+1}^{0^{n-m}}$ die Werthe bedeuten, welche in den $2m+1$ Integralen des $(n-m)$ten Systems Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-m-1}}$, $x_2^{0^{n-m-1}}$, $\ldots\, x_{2m+1}^{0^{n-m-1}}$ für $x_{2m+2}^{0^{n-m-1}} = 0$ annehmen, so geben die sämmtlichen Integralgleichungen der verschiedenen Systeme, verbunden mit den Gleichungen

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots \quad x_1^{0^n} = \alpha_n,$$

die verlangte Lösung. Man kann nämlich in der letzten der n Gleichungen:

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots \quad x_1^{0^n} = \alpha_n.$$

vermittelst des Integrals der letzten Differentialgleichung (des $n$ten Systems) $x_1^{0^n}$ durch $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, dann in den beiden letzten vermittelst der drei Integrale des $(n-1)$ten Systemes $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, $x_3^{0^{n-1}}$ durch $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, dann in den drei letzten vermittelst der 5 Integrale des $n-2$ten Systems Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, $x_5^{0^{n-2}}$ durch $x_1^{0^{n-3}}$, $x_2^{0^{n-3}}$, $\ldots\, x_6^{0^{n-3}}$ ausdrücken, und so fortfahren, bis man vermittelst der Integration des 1sten Systems alles in den n Gleichungen durch die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ ausgedrückt hat.

Wir haben gesehen, dafs wenn von den $2n$ Gröfsen X_1, X_2, ... X_{2n} eine Zahl $n-1$ verschwindet, was den Fall der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, die Integration des 1sten Systems Differentialgleichungen hinreicht. Wenn eine geringere Zahl $n-m$ fehlen, so dafs

$$X_1 = X_2 \dots = X_{n-m} = 0,$$

so braucht man das obige Verfahren nur so weit fortzusetzen, bis man die vorgelegte Differentialgleichung auf eine mit $2n-2m+2$ Variabeln reducirt hat, welche die Form haben wird:

$$0 = X^{0^{m-1}}_{n-m+1} dx^{0^{m-1}}_{n-m+1} + X^{0^{m-1}}_{n-m+2} dx^{0^{m-1}}_{n-m+2} \dots + X^{0^{m-1}}_{2n-2m+2} dx^{0^{m-1}}_{2n-2m+2},$$

indem die Coëfficienten von $dx^{0^{m-1}}_1$, $dx^{0^{m-1}}_2$, ... $dx^{0^{m-1}}_{n-m}$ fehlen. Die Integration des $m$ten Systems Differentialgleichungen reicht hin, die $n-m+1$ Gleichungen zu finden, durch welche dieser Differentialgleichung Genüge geschieht, und man braucht keine Differentialgleichungen weiter zu integriren.

Man kann sich auch zur Integration der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

folgender Methode bedienen, welche von der *Pfaff*schen verschieden ist. Indem man nur x_1 und x_2 als Variabeln betrachtet, kann man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln

$$X_1 dx + X_2 dx_2 = U du$$

setzen. Betrachtet man auch x_3 und x_4 als Variabeln, so erhält man hierdurch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = U du + U' dx_3 + U'' dx_4,$$

wo, wenn man u statt x_1 einführt, U, U', U'' Functionen von u, x_2, x_3, x_4 werden. Durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 3 Variabeln kann man, wie sich leicht zeigen läfst, diesem Ausdruck die Form geben

$$U du + U' dx_3 + U'' dx_4 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2,$$

wodurch auch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2.$$

Betrachtet man noch x_5, x_6 als Variabeln, so erhält man hierdurch:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_6 dx_6 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6,$$

wo, wenn man v_1, v_2 statt x_1, x_2 einführt, V_1, V_2, V', V'' Functionen

von v_1, v_2, x_3, x_4, x_5, x_6 werden. Dem vorstehenden Ausdruck kann man durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 4 Variabeln die Form geben

$$V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

wodurch auch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots . + X_6 dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

u. s. w. Fährt man so fort, so erhält man, nachdem man zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, und dann hintereinander partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3, 4, ... n Variabeln integrirt hat, zuletzt durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln die verlangten n Gleichungen. Da nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $k+1$ Variabeln die Integration von $2k-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $2k$ Variabeln gefordert, so sieht man, dafs man nach dieser Methode eben so viel Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen gleich viel Variabeln zu integriren hat, wie nach der früheren Methode. Wenn m von den Gröfsen X_1, X_2, ... X_{2n} gleich 0 sind, so kann man sogleich bei diesem Gange der Operationen mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+2$ Variabeln anfangen.

Den 9ten December 1836.

9.

Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brounker; et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q$.

(Par Mr. *Jean Plana* à Turin.)

(Suite du No. 1. dans le cahier précédent.)

16.

Cherchons maintenant l'expression de ces intégrales par des produits infinis, ainsi que cela a été fait par *Euler* dans le premier Mémoire qu'il a publié sur ce sujet.

L'équation (29.) donne

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-1} = \frac{p+qn}{qn}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^q.$$

Donc en combinant cette équation avec l'équation (36.), on aura

$$43.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-1} = \frac{1}{nq}\left(\frac{nq+p}{p(q+1)}\right)\left(\frac{2nq+2(p+n)}{(p+n)(q+2)}\right) \times\left(\frac{3nq+3(p+2n)}{(p+2n)(q+3)}\right)\left(\frac{4nq+4(p+3n)}{(p+3n)(q+4)}\right)\text{ etc.}$$

Actuellement, si l'on change q en $\frac{q}{n}$ il viendra

$$44.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{n}{q}\left(\frac{q+p}{p(q+n)}\right)2n\left(\frac{q+p+n}{(p+n)(q+2n)}\right) \times 3n\left(\frac{q+p+2n}{(p+2n)(q+3n)}\right)4n\left(\frac{q+p+3n}{(p+3n)(q+4n)}\right)\text{ etc.}$$

Le second membre de cette équation présente les quatre variétés suivantes dans la manière dont il peut être écrit: en posant pour plus de simplicité

$$X = (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1},$$

on a:

$$45.\quad \int^1 Xx^{p-1}dx = \frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \times\frac{4n(p+q+4n)}{(p+4n)(q+4n)}\cdot\frac{5n(p+q+5n)}{(p+5n)(q+5n)}\text{ etc.},$$

$$46.\quad \int_0^1 Xx^{p-1}dx = \frac{n}{pq}\cdot\frac{2n(p+q)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{3n(p+q+n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{4n(p+q+2n)}{(p+3n)(q+3n)}\text{ etc.},$$

$$47.\quad \int_0^1 Xx^{p-1}dx = \frac{1}{p}\cdot\frac{n(p+q)}{q(p+n)}\cdot\frac{2n(p+q+n)}{(q+n)(p+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+2n)}{(q+2n)(p+3n)}\text{ etc.},$$

$$48.\quad \int_0^1 Xx^{p-1}dx = \frac{1}{q}\cdot\frac{n}{q+n}\cdot\frac{2n}{q+2n}\cdot\frac{3n}{q+3n}\cdot\frac{4n}{q+4n}\text{ etc.}$$
$$\times\frac{q+p}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\text{ etc.};$$

pourvu que ces produits soient continués à l'infini. La formule (45.) est la plus caractéristique à l'égard de la fonction de p, q, n qui représente cette intégrale définie. C'est par elle que *Euler*, vers l'années 1765, a dévoilé les principales propriétés de cette fonction dans un mémorable Mémoire qu'il a publié dans le 3me volume des *Miscellanea Taurinensia*.

La seule inspection de cette formule démontre que, pour une même valeur de n on peut échanger les deux exposans p et q sans faire varier la valeur de cette intégrale définie: ce qui fournit l'équation désignée par $(a''.)$ dans le §. précédent. Il n'est pas moins évident que, dans le cas de $q=n$, la valeur de cette intégrale définie est égale à $\frac{1}{p}$. On exprime cette propriété par l'équation

$$a'''.\quad \left(\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{1}{p}.$$

Dans le cas général on a, conformément à l'équation (45.):

$$49.\quad \left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\text{ etc.}$$

Donc en changeant p en $p+q$ et q en r, on a de même

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{r(p+q)}\cdot\frac{n(r+p+q+n)}{(p+q+n)(r+n)}\cdot\frac{2n(r+p+q+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)}\text{ etc.}$$

Cela posé, si l'on multiplie ces deux équations, il viendra

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{n^2(r+p+q+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4n^2(r+p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\text{ etc.}$$

Or il est manifeste, que la permutation entre les trois lettres p, q, r ne change pas le second membre de cette équation: donc en faisant les trois permutations deux à deux, dont sont susceptibles les trois lettres p, q, r, nous aurons

$$E.\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{r+q}{p}\right).$$

C'est précisément ainsi que *Euler* a découvert cette équation fondamentale; et certes il n'y a aucun moyen plus naturel pour rencontrer cette frappante

vérité, à moins qu'on ne veuille faire précéder l'équation (β.) dont celle-ci, devient alors une conséquence immédiate.

La même équation (45.) ou (49.) offre une autre conséquence fort importante: en y faisant $p+q=n$, on en tire

$$\left(\frac{p}{n-p}\right)=\frac{1}{p}\cdot\frac{n^2}{n^2-p^2}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-p^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-p^2}\cdot\frac{16n^2}{16n^2-p^2}\text{ etc.}$$

Or il est manifeste pour tout homme qui connaît la transformation

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\text{ etc.}$$

que l'équation précédente revient à dire, que

$$50.\quad \left(\frac{p}{n-p}\right)=\left(\frac{n-p}{p}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

17.

Euler, qui tira un si beau parti de la factorielle (49.) en établissant par son moyen l'equation (*E*.) et l'équation (50.), observa aussi, quelques années plus tard, que cette série de produits avait, comme la factorielle de ***Wallis***, l'inconvenient de ne pas offrir le moyen le plus expéditif pour évaluer numériquement ces transcendantes. Alors, au lieu de s'en tenir à la série fort peu convergente

$$51.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}=\frac{1}{p}+\frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{p+n}+\frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{1}{p+2n}+\text{etc.}$$

qu'on obtient en développant le binome et intégrant ensuite depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, il imagina de partager en deux parties l'intégration de ce même développement, et de prendre la première depuis $x=0$ jusqu'à $x^n=\frac{1}{2}$, et la seconde depuis $x^n=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$. Par ce moyen, ***Euler***, obtient la double série

$$51.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$=\left\{\begin{aligned}&2^{-\frac{p}{n}}\left[\frac{1}{p}+\frac{n-q}{2n}\cdot\frac{1}{n+p}+\frac{n-q.2n-q}{2n.4n}\cdot\frac{1}{2n+p}+\text{etc.}\right]\\&+2^{-\frac{q}{n}}\left[\frac{1}{p}+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+q}+\frac{n-p.2n-p}{2n.4n}\cdot\frac{1}{2n+q}+\text{etc.}\right]\end{aligned}\right\},$$

qui se trouve rapportée dans le Tome IV. de son Calcul intégral (V. p. 323 — 325).

Sur cela j'observe, que si $q = p$, on a

$$53. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$$
$$= 2^{1-\frac{p}{n}}\left[\frac{1}{p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-p.2n-p}{2n.4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \text{etc.}\right].$$

Or il est facile de sommer cette série, autrement que par l'intégrale définie qui compose le premier membre de cette équation. En effet, on peut l'écrire ainsi:

$$\frac{2^{1-\frac{p}{n}}}{n}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\frac{p}{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{n}-1\right)\frac{1}{\frac{p}{n}+1} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\left(\frac{p}{n}-1\right)\left(\frac{p}{n}-2\right)}{1.2}\cdot\frac{1}{\frac{p}{n}-2} \\ \quad -\frac{1}{2^3}\cdot\frac{\left(\frac{p}{n}-1\right)\left(\frac{p}{n}-2\right)\left(\frac{p}{n}-3\right)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{\frac{p}{n}+3} + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Mais d'un autre côté, on peut écrire

$$\frac{1}{\frac{p}{n}} = \int_0^1 z^{\frac{p}{n}-1}dz; \qquad \frac{1}{\frac{p}{n}+1} = \int_0^1 z^{\frac{p}{n}}dz;$$
$$\frac{1}{\frac{p}{n}+2} = \int_0^1 z^{\frac{p}{n}+1}dz; \qquad \text{etc.};$$

partant la série précédente est équivalente à l'intégrale définie

$$\frac{2^{1-\frac{p}{n}}}{n}\int_0^1 dz\left\{\begin{array}{l}z^{\frac{p}{n}-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{n}-1\right)z^{\frac{p}{n}} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\left(\frac{p}{n}-1\right)\left(\frac{p}{n}-2\right)}{1.2}z^{\frac{p}{n}+1} \\ \quad -\frac{1}{2^3}\cdot\frac{\left(\frac{p}{n}-1\right)\left(\frac{p}{n}-2\right)\left(\frac{p}{n}-3\right)}{1.2.3}z^{\frac{p}{n}+2} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$
$$= \frac{2^{1-\frac{p}{n}}}{n}\int_0^1 dz\left(z-\tfrac{1}{2}z^2\right)^{\frac{p}{n}-1}.$$

De sorte que, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} = \frac{2^{1-\frac{p}{n}}}{n}\int_0^1 dz\left(z-\tfrac{1}{2}z^2\right)^{\frac{p}{n}-1}.$$

Actuellement, si l'on fait $2z - z^2 = u^n$, on aura:

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} = 2^{1-\frac{2p}{n}}\int_0^1 \frac{u^{p-1}du}{\sqrt{(1-u^n)}};$$

ou bien, en écrivant x au lieu de u:

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} = 2^{1-\frac{2p}{n}}\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}};$$

ce qui s'accorde avec l'équation (β''.) trouvée d'une autre manière dans le §. 15.

En appliquant une idée analogue au second membre de l'équation (52.), on va voir, que les deux séries qui le composent sont sommables chacune par une intégrale définie distincte. Pour cela, il faut d'abord remarquer, que l'équation

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int_0^{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} + \int_{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

est équivalente à celle-ci:

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int_0^{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} + \int_0^{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} x^{q-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1},$$

comme il est facile de le démontrer, en faisant dans la seconde partie $1-x^n = y^n$, et changeant ensuite y en x.

Cela posé, si l'on fait $x^n = \frac{1}{2}(1-\sqrt{(1-z^n)})$ on obtient, en écrivant x à la place de z, après la transformation:

$$54. \quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$= 2^{-\frac{p+q}{n}}\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\left\{\begin{array}{l}(1-\sqrt{(1-x^n)})^{\frac{p}{n}-1}(1+\sqrt{(1-x^n)})^{\frac{q}{n}-1}\\ +(1-\sqrt{(1-x^n)})^{\frac{q}{n}-1}(1+\sqrt{(1-x^n)})^{\frac{p}{n}-1}\end{array}\right\}.$$

Le second membre est, comme on le voit, beaucoup plus compliqué que le premier. Néanmoins il y a des cas où cette manière de voir peut être utile. Supposons, par exemple, $p-q=\frac{n}{2}$; alors on tire de cette équation

$$\int_0^1 x^{q+\frac{n}{2}-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = 2^{-\frac{2q}{n}}\int_0^1 \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt{(1-\sqrt{x^n})}},$$

ou bien, par le changement de x en x^2, dans le second membre seulement:

$$55. \quad \int_0^1 x^{q+\frac{n}{2}-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = 2^{1-\frac{2q}{n}}\int_0^1 \frac{x^{2q-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

En écrivant $\frac{p}{2}$ au lieu de q, cette formule donne

$$56. \quad \int_0^1 x^{\frac{n}{2}+\frac{p}{2}-1}dx(1-x^n)^{\frac{\frac{1}{2}p}{n}-1} = 2^{1-\frac{p}{n}}\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

En rapprochant cette équation de cette désignée par (β''.) on en tire la conséquence, que n et p étant des nombres *pairs*, on a

$$57.\quad \left(\frac{\frac{n}{2}+\frac{p}{2}}{\frac{1}{2}p}\right) = 2^{\frac{p}{n}}\left(\frac{p}{p}\right);$$

ce qui établit une relation fort simple entre deux intégrales *Eulériennes* de première espèce dont les exposans satisfont à cette forme.

La double série qui constitue le second membre de l'équation (52.) n'offrirait pas le meilleur moyen pour calculer le rapport de deux intégrales de ce genre, dans lesquelles les nombres p et q seraient fort grands comparativement à l'exposant n du radical.

En pareil cas il faut recourir à la formule (β.), laquelle donne, en vertu de la propriété $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$:

$$B.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{p+q}{pq}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}+1\right).\Gamma\left(\frac{q}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}+1\right)}.$$

Par la formule de *Stirling* développée par *Euler*, on a:

$$B'.\quad \begin{cases}\Gamma(a+1) = \left(\frac{a}{e}\right)^a\sqrt{(2\pi a)}.M;\\ \qquad M = 1+\frac{1}{12.a}+\frac{1}{2(12a)^2}-\frac{139}{30(12.a)^3}-\text{etc.};\end{cases}$$

et par conséquent

$$B''.\quad \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{(p)^{\frac{p}{n}}(q)^{\frac{q}{n}}}{(p+q)^{\frac{p+q}{n}}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{p+q}{pq}\right)}\cdot\frac{N'N''}{N'''},$$

où N', N'', N''' sont les valeurs que prend la série $M = 1+\frac{1}{12.a}+$ etc. en y faisant successivement

$$a = \frac{p}{n},\quad a = \frac{q}{n},\quad a = \frac{p+q}{n}.$$

Si, au contraire, l'exposant n était fort grand comparativement à p et q, il faudrait récourir à la formule

$$\Gamma(a+1) = 1-a.C+\left(\tfrac{1}{2}C^2+\frac{\pi}{12}\right)a^2+\text{etc.},$$
$$C = 0,57721566\ldots$$

donnée par *Legendre* dans le 1er volume de ses *Exercices* de calc. intégral (page 282).

§. 18.

L'équation (45.) n'étant vraie, qu'en supposant infini le nombre des facteurs, il est intéressant de chercher celle qui doit la remplacer, lorsqu'on prend un nombre fini des mêmes facteurs. Pour cela, remarquons d'abord, que l'équation (29.) par le changement de q en $\frac{q}{n}$, donne

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{p+q}{q} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} (1-x^n);$$

partant on a

$$58. \quad \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{p+q}{p} \int_0^1 x^{p+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}.$$

Par une application répétée de cette formule, on a donc

$$59. \quad \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$= \frac{p+q}{p} \cdot \frac{p+q+n}{p+n} \int_0^1 x^{p+2n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$= \frac{p+q}{p} \cdot \frac{p+q+n}{p+n} \cdot \frac{p+q+2n}{p+2n} \int_0^1 x^{p+3n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$= \frac{p+q}{p} \cdot \frac{p+q+n}{p+n} \cdots \frac{p+q+in}{p+in} \int_0^1 x^{p+(i+1)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}.$$

Cette transformation étant aussi vraie, lorsque $p = n$, on en tire

$$\int_0^1 x^{n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

$$= \frac{q+n}{n} \cdot \frac{q+2n}{2n} \cdot \frac{q+3n}{3n} \cdots \frac{q+(i+1)n}{(i+1)n} \int_0^1 x^{(i+2)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}.$$

Mais il est évident que

$$\int_0^1 x^{n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{1}{q}.$$

Donc, en changeant i en $i-1$, il viendra

$$60. \quad \frac{1}{q} = \frac{q+n}{n} \cdot \frac{q+2n}{2n} \cdots \frac{q+in}{in} \int_0^1 x^{(i+1)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1},$$

ou bien

$$61. \quad \frac{1}{q} \cdot \frac{n}{q+n} \cdot \frac{2n}{q+2n} \cdot \frac{3n}{q+3n} \cdots \frac{in}{q+in} = \int_0^1 x^{(i+1)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}.$$

Si l'on fait pour plus de simplicité:

$$Q = \frac{\int_0^1 x^{p+(i+1)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}}{\int_0^1 x^{(i+1)n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}},$$

le produit des équations (59.) et (61), donnera

62. $$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{1}{q}\cdot\frac{n}{q+n}\cdot\frac{2n}{q+2n}\cdot\frac{3n}{q+3n}\cdots\frac{in}{q+in} \times\frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdots\frac{p+q+in}{p+in}\cdot Q.$$

En variant la manière dont cette équation peut être écrite, nous aurons

63. $$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \times\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)}\cdots\frac{in(p+q+in)}{(p+in)(q+in)}Q;$$

64. $$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{n}{pq}\cdot\frac{2n(p+q)}{(p+n)(q+n)}\cdots\frac{3n(p+q+n)}{(p+2n)(q+2n)} \times\frac{4n(p+q+2n)}{(p+3n)(q+3n)}\cdots\frac{(p+q+(i-1)n)(p+q+in)}{(p+in)(q+in)}Q;$$

65. $$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{1}{p}\cdot\frac{n(p+q)}{q(p+n)}\cdot\frac{2n(q+p+n)}{(q+n)(p+2n)}\cdot\frac{3n(q+p+2n)}{(q+2n)(p+3n)}\times \cdots\frac{in(p+q+(i-1)n)}{(q+(i-1)n)(p+in)}\cdot\frac{(p+q+in)}{q+in}Q.$$

Indépendamment de ce qui précède, il n'est pas difficile de démontrer, que le rapport des deux intégrales désigné par Q s'approche de l'unité à mesure que le nombre i augmente: de sorte qu'il se confond avec l'unité lorsque $i=\infty$. En effet, supposons, pour un moment, que p soit un très-grand nombre et voyons ce que devient dans ce cas particulier l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int_0^1 x^{p-1}dx.X = \frac{1}{p}\int_0^1 X\,d.x^p.$$

En posant $z=x^p$; les limites de la nouvelle variable z seront encore $z=0$, $z=1$: donc en remplaçant la lettre z par la lettre x, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}dx.X = \frac{1}{p}\int_0^1\left(1-x^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{q}{n}-1}dx.$$

Pour un autre exposant p' on aurait de même

$$\int_0^1 x^{p'-1}dx.X = \frac{1}{p'}\int_0^1\left(1-x^{\frac{n}{p'}}\right)^{\frac{q}{n}-1}dx.$$

Mais si, p et p' sont deux nombres fort grands, on peut faire

$$1-x^{\frac{n}{p}} = \frac{n}{p}\log\left(\frac{1}{x}\right);\qquad 1-x^{\frac{n}{p'}} = \frac{n}{p'}\log\left(\frac{1}{x}\right);$$

et par conséquent

$$\int_0^1 x^{p-1}dx.X = \frac{1}{p}\left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{q}{n}-1}\int_0^1 dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}-1},$$

$$\int_0^1 x^{p'-1}dx.X = \frac{1}{p'}\left(\frac{n}{p'}\right)^{\frac{q}{n}-1}\int_0^1 dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}-1},$$

De là on tire

$$\frac{\int_0^1 x^{p-1}dx.X}{\int_0^1 x^{p'-1}dx.X} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{q}{n}}.$$

Donc, en faisant $p' = p + k$, on aura $\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(1+\frac{k}{p}\right)^{\frac{q}{n}}$; ce qui rend manifeste que la différence k étant finie, la limite du rapport de ces deux intégrales doit être l'unité, lorsque $p = \infty$.

§. 19.

Dans le cas particulier de $p + q = n$, la combinaison des équations (50.) et (63.), donne

66. $$\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{n^2}{n^2-p^2}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-p^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-p^2}\cdots\frac{i^2n^2}{i^2n^2-p^2}\cdot\frac{(i+1)n}{(i+1)n-p}\cdot Q',$$

où l'on a fait pour plus de simplicité;

$$Q' = \frac{\int_0^1 x^{p+(i+1)n-1}dx(1-x^n)^{-\frac{p}{n}}}{\int_0^1 x^{(i+1)n-1}dx(1-x^n)^{-\frac{p}{n}}}.$$

Il suit de là, que

67. $$\left[\frac{(i+1)n-p}{(i+1)n}\right]\cdot\frac{p\pi}{Q'n\sin\frac{p\pi}{n}} = \frac{(1.2.3.4\ldots.i)^2}{\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)\left(4-\frac{p^2}{n^2}\right)\left(9-\frac{p^2}{n^2}\right)\ldots.\left(i^2-\frac{p^2}{n^2}\right)}.$$

Maintenant, s'il était question de savoir ce que devient le second membre de cette équation pour une valeur fort grande de i, on pourrait s'y prendre ainsi.

D'après la formule (β.) posée dans le §. 13. et la propriété $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, nous avons

$$Q' = \frac{\Gamma\left(i+\frac{p}{n}+1\right).\Gamma\left(i-\frac{p}{n}+2\right)}{\Gamma(i+2).\Gamma(i+1)} = \left[1-\frac{p}{n(i+1)}\right].\frac{\Gamma\left(i+\frac{p}{n}+1\right)\Gamma\left(i-\frac{p}{n}+1\right)}{[\Gamma(i+1)]^2}.$$

Mais a étant un fort grand nombre, la formule de *Stirling* développée par *Euler* dans son Calc. diff. donne

$$\Gamma(a+1) = \left(\frac{a}{e}\right)^a \sqrt{(2\pi a)}.M;$$

e étant la base des log. hyp. et M:

$$M = 1 + \frac{1}{12.a} + \frac{1}{2(12.a)^2} - \frac{139}{30(12.a)^3} - \frac{571}{120(12.a)^4} - \text{etc.}$$

Donc en appliquant cette formule à l'expression précédente de Q', il viendra

$$Q' = \left[1 - \frac{p}{n(i+1)}\right]\left[1+\frac{p}{in}\right]^{i+\frac{p}{n}+\frac{1}{2}} . \left[1-\frac{p}{in}\right]^{i-\frac{p}{n}+\frac{1}{2}} . \frac{M'M''}{M'''^2};$$

où M', M'', M''' sont les valeurs déduites de l'expression précédente de M, en y faisant successivement $a = i+\frac{p}{n}$, $a = i-\frac{p}{n}$, $a = i$.

De là nous concluons, que

$$68. \quad \frac{(1.2.3.4\ldots.i)^2}{\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)\left(4-\frac{p^2}{n^2}\right)\left(9-\frac{p^2}{n^2}\right)\ldots.\left(i^2-\frac{p^2}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\pi p}{n \sin\frac{p\pi}{n}} . \left[1+\frac{p}{in}\right]^{-i-\frac{p}{n}-\frac{1}{2}} . \left[1-\frac{p}{in}\right]^{-i+\frac{p}{n}-\frac{1}{2}} . \frac{M'''^2}{M'M''}.$$

A l'aide de cette formule on pourrait évaluer le reste de la factorielle

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right) \text{ etc.,}$$

après avoir calculé le produit d'un assez grand nombre de ces facteurs

§. 20.

Jusqu'ici, nous avons tacitement supposé, que tous les cas de l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

pouvaient être ramenés à ceux où les exposans p et q sont inférieurs à l'exposant n. Mais s'il était nécessaire de le démontrer cela serait facile. En effet: par le changement de p en $p-n$ la formule (58.) donne

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{p-n}{p+q-n} . \int_0^1 x^{p-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1};$$

ou bien

$$69. \quad \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right).$$

partant, il est visible que, à l'aide de cette formule on fait dépendre le cas de $p > n$ de celui où on aurait $p < n$.

Si l'on observe maintenant, que $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$, on aura, en appliquant au second membre de cette équation la formule (69.):

$$70.\quad \left(\frac{p}{q}\right)=\frac{q-n}{p+q-n}\left(\frac{q-n}{p}\right)=\frac{q-n}{p+p-n}\left(\frac{p}{q-n}\right).$$

A l'aide de cette formule, on pourra réduire le cas de $q>n$ à celui de $q<n$.

Lorsque p et q sont plus grands que $\frac{1}{2}n$, on peut réduire la transcendante $\left(\frac{p}{q}\right)$ à une autre semblable, représenté par $\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$, où $n-p$ et $n-q$ sont plus petits que $\frac{1}{2}n$. Pour trouver cette formule de réduction j'observe que l'équation (*E.*) d'*Euler* établie dans le §. 16., donne

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right);\qquad \left(\frac{p}{q'}\right)\left(\frac{p+q'}{r'}\right)=\left(\frac{p}{r'}\right)\left(\frac{p+r'}{q'}\right).$$

Donc en faisant le produit de ces deux équations, et prenant ensuite $p+q'=n-q$, $r'=n-p$; on obtient

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{n-p}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p}{n-p-q}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)\left(\frac{p}{n-p}\right)\left(\frac{n}{n-p-q}\right)$$
$$=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).\frac{\omega}{\sin p\omega}.\frac{1}{n-p-q}.$$

Cela posé, si l'on prend $r=n-p-q$, il est clair que cette équation donne

$$K.\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n-p}{n-p}\right)=\frac{\omega.\sin(p+q)\omega}{(n-p-q).\sin p\omega.\sin q\omega}.$$

Legendre a remarqué le premier cette conséquence de l'équation d'*Euler*. Lorsque $q=p$, on obtient par-là:

$$K'.\quad \left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{n-p}{n-p}\right)=\frac{2\omega.\cot p\omega}{n-2p}.$$

En substituant ici pour $\left(\frac{p}{p}\right)$, $\left(\frac{n-p}{n-p}\right)$ les valeurs données par la formule (β''.) trouvée dans le §. 15., on aura ce résultat remarquable dû à *Legendre*, savoir

$$K''.\quad \int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.\int_0^1\frac{x^{n-p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{2\omega.\cot p\omega}{n-2p}.$$

§. 21.

Le principe compris dans les deux formules (69.) et (70.) une fois posé, il est clair que, pour chaque valeur de n on peut former un nombre n^2 de fonctions semblables à celle désignée par $\left(\frac{p}{q}\right)$, en faisant successivement $p=1, 2, 3, \ldots n$, et $q=1, 2, 3, 4, \ldots n$. Parmi celles-ci, plusieurs sont immédiatement intégrables par les formules

$$\left(\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{p};\qquad\left(\frac{p}{n-p}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}};\qquad\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

trouvées précédemment. Mais, afin de rendre plus sensible le caractère de ces transcendantes qui restent après l'exclusion de celles qu'on peut évaluer par ces trois formules, voici le tableau de la totalité de ces intégrales pour $n=6$ et $n=7$.

Tableau des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour $n=6$.

$(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{1})$, $(\frac{3}{1})$, $(\frac{4}{1})$, $(\frac{5}{1})$, $(\frac{6}{1})$,
$(\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{2})$, $(\frac{3}{2})$, $(\frac{4}{2})$, $(\frac{5}{2})$, $(\frac{6}{2})$,
$(\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3})$, $(\frac{3}{3})$, $(\frac{4}{3})$, $(\frac{5}{3})$, $(\frac{6}{3})$,
$(\frac{1}{4})$, $(\frac{2}{4})$, $(\frac{3}{4})$, $(\frac{4}{4})$, $(\frac{5}{4})$, $(\frac{6}{4})$,
$(\frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5})$, $(\frac{3}{5})$, $(\frac{4}{5})$, $(\frac{5}{5})$, $(\frac{6}{5})$,
$(\frac{1}{6})$, $(\frac{2}{6})$, $(\frac{3}{6})$, $(\frac{4}{6})$, $(\frac{5}{6})$, $(\frac{6}{6})$.

Tableau des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour $n=7$.

$(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{1})$, $(\frac{3}{1})$, $(\frac{4}{1})$, $(\frac{5}{1})$, $(\frac{6}{1})$, $(\frac{7}{1})$,
$(\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{2})$, $(\,_7)$, $(\frac{4}{2})$, $(\frac{5}{2})$, $(\frac{6}{2})$, $(\frac{7}{2})$,
$(\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3})$, $(\frac{3}{3})$, $(\frac{4}{3})$, $(\frac{5}{3})$, $(\frac{6}{3})$, $(\frac{7}{3})$,
$(\frac{1}{4})$, $(\frac{2}{4})$, $(\frac{3}{4})$, $(\frac{4}{4})$, $(\frac{5}{4})$, $(\frac{6}{4})$, $(\frac{7}{4})$,
$(\frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5})$, $(\frac{3}{5})$, $(\frac{4}{5})$, $(\frac{5}{5})$, $(\frac{6}{5})$, $(\frac{7}{5})$,
$(\frac{1}{6})$, $(\frac{2}{6})$, $(\frac{3}{6})$, $(\frac{4}{6})$, $(\frac{5}{6})$, $(\frac{6}{6})$, $(\frac{7}{6})$,
$(\frac{1}{7})$, $(\frac{2}{7})$, $(\frac{3}{7})$, $(\frac{4}{7})$, $(\frac{5}{7})$, $(\frac{6}{7})$, $(\frac{7}{7})$,

L'inspection du tableau relatif à $n=6$ montre, que en excluant: 1°. toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans lesquelles un des deux nombres p ou q est égal à 6; 2°. toutes les fonctions dans lesquelles la somme $p+q=6$, il en reste un nombre exprimé par

$$n^2-n-(n-1)-(n-1)=(n-1)(n-2).$$

Parmi celles-ci, il y en a $n-2$ sans répétition, mais, les autres s'y trouvent doubles, d'après le principe $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$. Donc, le nombre de ces fonctions absolument différentes est

$$n-2+\frac{(n-1)(n-2)-(n-2)}{2}=\frac{n(n-2)}{2}.$$

L'inspection du tableau relatif à $n=7$, donne de même

$$n^2-n-(n-1)-(n-1)=(n-1)(n-2),$$

pour les fonctions restantes après l'exclusion de celles où p ou q est égal à 7, ou bien leur somme $p+q=7$. Mais, parmi ces $(n-1)(n-2)$ fonctions il y en a $n-1$ sans répétition et les autres doublées. De sorte que

$$n-1-\frac{(n-1)(n-2)-(n-1)}{2}=\frac{(n-1)^2}{2}$$

est le nombre des fonctions absolument différentes. Un examen tout-à-fait semblable fait sur les autres cas conduit à cette conclusion générale: que, le nombre des fonctions absolument différentes, après l'exclusion de celles qu'on peut déterminer par l'un ou l'autre des trois principes rappelés au commencement de ce §.; est exprimé par

$$\left.\frac{n(n-2)}{2}\right\}\text{ si le nombre } n \text{ est } pair;$$

$$\left.\frac{(n-1)^2}{2}\right\}\text{ si le nombre } n \text{ est } impair.$$

Le nombre de ces fonctions sera donc toujours *pair*.

§. 22.

Pour mieux fixer les idées, voici le tableau de ces fonctions pour $n=3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{2})\}$ pour $n=3$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{2})$, $(\tfrac{3}{3})\}$ pour $n=4$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{4}{2})$, $(\tfrac{3}{3})$, $(\tfrac{4}{3})$, $(\tfrac{4}{4})\}$ pour $n=5$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{4}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{3}{2})$, $(\tfrac{5}{2})$, $(\tfrac{4}{3})$, $(\tfrac{5}{3})$, $(\tfrac{4}{4})$, $(\tfrac{5}{4})$, $(\tfrac{5}{5})\}$ pour $n=6$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{4}{1})$, $(\tfrac{5}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{3}{2})$, $(\tfrac{4}{2})$, $(\tfrac{3}{3})$, $(\tfrac{5}{3})$
$(\tfrac{4}{4})$, $(\tfrac{5}{4})$, $(\tfrac{6}{4})$, $(\tfrac{5}{5})$, $(\tfrac{6}{5})$, $(\tfrac{6}{2})$, $(\tfrac{6}{3})$, $(\tfrac{6}{6})\}$ pour $n=7$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{4}{1})$, $(\tfrac{5}{1})$, $(\tfrac{6}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{3}{2})$, $(\tfrac{3}{3})$, $(\tfrac{4}{2})$
$(\tfrac{4}{3})$, $(\tfrac{5}{2})$, $(\tfrac{7}{2})$, $(\tfrac{6}{3})$, $(\tfrac{5}{4})$, $(\tfrac{7}{3})$, $(\tfrac{6}{4})$, $(\tfrac{5}{5})$, $(\tfrac{7}{4})$, $(\tfrac{6}{5})$
$(\tfrac{6}{6})$, $(\tfrac{7}{5})$, $(\tfrac{7}{6})$, $(\tfrac{7}{7})\}$ pour $n=8$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{4}{1})$, $(\tfrac{5}{1})$, $(\tfrac{6}{1})$, $(\tfrac{7}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{3}{2})$, $(\tfrac{4}{2})$
$(\tfrac{5}{2})$, $(\tfrac{6}{2})$, $(\tfrac{3}{3})$, $(\tfrac{4}{3})$, $(\tfrac{5}{3})$, $(\tfrac{4}{4})$, $(\tfrac{8}{2})$, $(\tfrac{7}{3})$, $(\tfrac{6}{4})$, $(\tfrac{5}{5})$
$(\tfrac{8}{3})$, $(\tfrac{7}{4})$, $(\tfrac{6}{5})$, $(\tfrac{8}{4})$, $(\tfrac{7}{5})$, $(\tfrac{6}{6})$, $(\tfrac{8}{5})$, $(\tfrac{7}{6})$, $(\tfrac{8}{6})$, $(\tfrac{7}{7})$
$(\tfrac{8}{7})$, $(\tfrac{8}{8})\}$ pour $n=9$.

$(\tfrac{1}{1})$, $(\tfrac{2}{1})$, $(\tfrac{3}{1})$, $(\tfrac{4}{1})$, $(\tfrac{5}{1})$, $(\tfrac{6}{1})$, $(\tfrac{7}{1})$, $(\tfrac{8}{1})$, $(\tfrac{2}{2})$, $(\tfrac{3}{2})$
$(\tfrac{4}{2})$, $(\tfrac{5}{2})$, $(\tfrac{6}{2})$, $(\tfrac{7}{2})$, $(\tfrac{3}{3})$, $(\tfrac{4}{3})$, $(\tfrac{5}{3})$, $(\tfrac{6}{3})$, $(\tfrac{4}{4})$, $(\tfrac{5}{4})$
$(\tfrac{9}{2})$, $(\tfrac{8}{3})$, $(\tfrac{7}{4})$, $(\tfrac{9}{3})$, $(\tfrac{6}{5})$, $(\tfrac{7}{5})$, $(\tfrac{8}{4})$, $(\tfrac{9}{5})$, $(\tfrac{7}{6})$, $(\tfrac{8}{5})$
$(\tfrac{9}{4})$, $(\tfrac{6}{6})$, $(\tfrac{7}{7})$, $(\tfrac{8}{6})$, $(\tfrac{8}{7})$, $(\tfrac{9}{6})$, $(\tfrac{9}{7})$, $(\tfrac{8}{8})$, $(\tfrac{9}{8})$, $(\tfrac{9}{9})\}$ pour $n=10$.

En général, pour toute valeur donnée de n, on formera le tableau de ces fonctions qui s'y rapporte en suivant ces trois règles: 1°. La moitié des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ doit être formée par des nombres tels que $p+q = n-1$, ou $p+q < n-1$. 2°. L'autre moitié doit être formée par les nombres qui donnent $p+q = n+1$ ou $p+q > n+1$. 3°. La plus grande somme $p+q = 2n-2$.

Maintenant, il s'agit de savoir, comment, à l'aide de l'équation

$$E.\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

d'*Euler*, et de l'équation

$$L.\quad \left(\frac{p}{p}\right) = 2^{1-\frac{2p}{n}}\left(\frac{p}{\frac{1}{2}n}\right),$$

trouvées dans les §. 15. et 16. on peut réduire au *minimum* le nombre de ces transcendantes, pour toute valeur donnée de l'exposant n. On pourra ensuite examiner, si les cas irréductibles pour une valeur donnée de n, sont réductibles aux cas analogues qui se rapportent aux valeurs inférieures de n.

§. 23.

Avant tout, nous ferons observer, que l'équation (L.) ne peut être employée que dans le cas de n nombre *pair*, parceque $\frac{1}{2}n$ doit être un nombre entier. D'après cela, afin d'établir d'abord les résultats qui ont lieu pour tout nombre entier, nous écarterons l'équation (L.), et nous chercherons, à l'aide de l'équation (E.) seulement, le système de celles qu'on peut former pour chaque valeur de n. A cet effet, il faut d'abord remarquer que, en posant $r=1$, on peut réduire à deux les fonctions qui demeurent inconnues parmi les quatre correspondantes à chaque valeur de p et q, après avoir fait $r=1$. De sorte que, au lieu de l'équation (E.) nous allons opérer sur celle-ci:

$$E'.\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{1}\right) = \left(\frac{p}{1}\right)\left(\frac{p+1}{q}\right).$$

Ce principe ainsi présenté ne serait pas tout-à-fait clair; mais la formation effective du système d'équations qui se rapporte aux premières valeurs de n fera disparaitre toute obscurité, et rendra évidentes les généralités auxquelles on peut ensuite s'élever. Voici ces équations déduites de l'équation (E'.).

Pour $n = 3$.

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right).$$

Pour $n = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right) \\ \left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ \left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right) \end{array}\right\}$$

N. B. La formule (69.) donne

$$\left(\tfrac{5}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right).$$

Pour $n = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right) \\ \left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ \left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right) \\ \left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right) \\ \left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right) \\ \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{4}\right) \end{array}\right\}$$

N. B. La formule (69.) donne

$$\left(\tfrac{6}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right);$$
$$\left(\tfrac{7}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right).$$

Pour $n = 6$ on a les six équations relatives à $n = 5$ plus les quatre suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right) \\ \left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right) \\ \left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right) \\ \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{9}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{5}\right) \end{array}\right\}$$

N. B. Il faut laisser dans les six équations précédentes les symboles $\left(\tfrac{6}{1}\right)$, $\left(\tfrac{7}{1}\right)$, et par la formule (69.) établir ces trois équations

$$\left(\tfrac{7}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right); \quad \left(\tfrac{8}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right); \quad \left(\tfrac{9}{1}\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right).$$

Pour $n = 7$ on a les dix équations relatives à $n = 6$, telles qu'elles sont primitivement écrites, plus les cinq équations suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right) \\ \left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right) \\ \left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{9}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right) \\ \left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{10}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right) \\ \left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{11}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right) \end{array}\right\}$$

N. B. La formule (69.) donne

$$\left(\tfrac{8}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right); \quad \left(\tfrac{9}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right);$$
$$\left(\tfrac{10}{1}\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right); \quad \left(\tfrac{11}{1}\right) = \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right).$$

Pour $n = 8$ on a les quinze équations relatives à $n = 7$, telles quelles sont primitivement écrites, plus les six équations suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tfrac{6}{2}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{2}\right) \\ \left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{9}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right) \\ \left(\tfrac{6}{4}\right)\left(\tfrac{10}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right) \\ \left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{11}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right) \\ \left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{12}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right) \\ \left(\tfrac{6}{7}\right)\left(\tfrac{13}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{7}\right) \end{array}\right\}$$

N. B. La formule (69.) donne

$$\left(\tfrac{9}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right); \quad \left(\tfrac{10}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right);$$
$$\left(\tfrac{11}{1}\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right); \quad \left(\tfrac{12}{1}\right) = \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right);$$
$$\left(\tfrac{13}{1}\right) = \tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{1}\right).$$

Pour $n=9$ on a les 21 équations relatives à $n=8$, telles qu'elles sont primitivement écrites, plus les 7 équations suivantes.

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\tfrac{7}{2}\right)\left(\tfrac{9}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{2}\right)\\
\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{10}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{3}\right)\\
\left(\tfrac{7}{4}\right)\left(\tfrac{11}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right)\\
\left(\tfrac{7}{5}\right)\left(\tfrac{12}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{5}\right)\\
\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{13}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\\
\left(\tfrac{7}{7}\right)\left(\tfrac{14}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)\\
\left(\tfrac{7}{8}\right)\left(\tfrac{15}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{8}\right)
\end{array}\right\}$$

N.B. La formule (69.) donne

$\left(\tfrac{10}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)$; $\left(\tfrac{11}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)$;
$\left(\tfrac{12}{1}\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right)$; $\left(\tfrac{13}{1}\right) = \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right)$;
$\left(\tfrac{14}{1}\right) = \tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{1}\right)$; $\left(\tfrac{15}{1}\right) = \tfrac{6}{7}\left(\tfrac{6}{1}\right)$.

Pour $n=10$, on a les 28 équations relatives à $n=9$, telles qu'elles sont primitivement écrites, plus les 8 équations suivantes.

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\tfrac{8}{2}\right)\left(\tfrac{10}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{2}\right)\\
\left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{11}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{3}\right)\\
\left(\tfrac{8}{4}\right)\left(\tfrac{12}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{4}\right)\\
\left(\tfrac{8}{5}\right)\left(\tfrac{13}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{5}\right)\\
\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{14}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\\
\left(\tfrac{8}{7}\right)\left(\tfrac{15}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{7}\right)\\
\left(\tfrac{8}{8}\right)\left(\tfrac{16}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{8}\right)\\
\left(\tfrac{8}{9}\right)\left(\tfrac{17}{1}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{9}\right)
\end{array}\right\}$$

N.B. La formule (69.) donne

$\left(\tfrac{11}{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)$; $\left(\tfrac{12}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)$;
$\left(\tfrac{13}{1}\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right)$; $\left(\tfrac{14}{1}\right) = \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right)$;
$\left(\tfrac{15}{1}\right) = \tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{1}\right)$; $\left(\tfrac{16}{1}\right) = \tfrac{6}{7}\left(\tfrac{6}{1}\right)$;
$\left(\tfrac{17}{1}\right) = \tfrac{7}{8}\left(\tfrac{7}{1}\right)$.

La loi de la formation de ces systèmes d'équations est par la rendue évidente: il y en a pour chaque valeur de n (depuis $n=3$) un nombre exprimé par $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, soit pour *n pair*, soit pour *n impair*. En reprochant cette conclusion de celle établie vers la fin du §. 21., nous dirons, que le nombre des transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui demeurent indépendantes est exprimé par:

$$\left.\frac{n(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n-2}{2}\right\} \text{ pour } n \text{ pair;}$$

$$\left.\frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}\right\} \text{ pour } n \text{ impair.}$$

La formation effective de ces systèmes d'équations pour les premières valeurs de n fournit le tableau suivant. Nous supposons, que la lettre ω remplace dans chaque cas particulier la quantité $\frac{\pi}{n}$.

Système d'équations pour $n = 3$.

$$\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \frac{\omega}{\sin\omega}$$

Système d'équations pour $n = 4$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin\omega} = \left(\tfrac{1}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 2\omega}$$

$$\frac{\omega}{\sin 2\omega} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right).$$

Système d'équations pour $n = 5$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 3\omega}$$

$$\frac{\omega}{\sin 3\omega} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)$$

$$\frac{\omega}{\sin 3\omega} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{4}{4}\right).$$

Système d'équations pour $n = 6$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin\omega} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 3\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\omega} = \left(\tfrac{3}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 4\omega}$$

$$\frac{\omega}{\sin 3\omega} = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$

$$\frac{\omega}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$

$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{5}\right).$$

Système d'équations pour $n = 7$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sin\omega} = \left(\tfrac{3}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 4\omega}$$

$$\frac{\omega}{\sin 3\omega} = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{4}\right)$$

$$\left(\tfrac{4}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 5\omega}$$

$$\frac{\omega}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{5}\right)$$

$$\frac{\omega}{\sin 5\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)$$

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)$$

$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)$$

$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right).$$

Système d'équations pour $n = 8$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sin 7\omega} = \left(\tfrac{3}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 4\omega}$$
$$\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sin 7\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 5\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin 7\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 6\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 5\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)$$
$$\frac{\omega}{\sin 6\omega} = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{6}{4}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)$$
$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right).$$
$$\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{7}\right).$$

Système d'équations pour $n = 9$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{4}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sin 8\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 5\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{5}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sin 8\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 6\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 4\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)$$
$$\left(\tfrac{6}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin 8\omega} = \left(\tfrac{6}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 7\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 6\omega} = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)$$
$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{7}\right)$$
$$\frac{\omega}{\sin 7\omega} = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{3}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{7}{4}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{7}{5}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{5}\right)$$
$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)$$
$$\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{7}{7}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)$$
$$\tfrac{6}{7}\left(\tfrac{8}{7}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{8}\right).$$

Système d'équations pour. $n = 10$.

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right) = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{4}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sin 9\omega} = \left(\tfrac{4}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 5\omega}$$
$$\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)$$
$$\left(\tfrac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sin 9\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 6\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 5\omega} = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right) = \left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)$$
$$\left(\tfrac{6}{2}\right)\left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{2}\right)$$
$$\left(\tfrac{6}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sin 9\omega} = \left(\tfrac{6}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 7\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 6\omega} = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)$$
$$\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right) = \left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{7}\right)$$
$$\left(\tfrac{7}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin 9\omega} = \left(\tfrac{7}{1}\right)\cdot\frac{1}{\sin 8\omega}$$
$$\frac{\omega}{\sin 7\omega} = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{3}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{5}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)$$
$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{7}{7}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)$$
$$\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right) = \left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{8}{8}\right)$$
$$\frac{\omega}{\sin 8\omega} = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{2}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{8}{3}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{3}\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{4}\right)$$
$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{8}{5}\right) = \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{9}{5}\right)$$
$$\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)$$
$$\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{7}\right)$$
$$\tfrac{6}{7}\left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{8}{8}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{9}{8}\right)$$
$$\tfrac{7}{8}\left(\tfrac{7}{1}\right)\left(\tfrac{9}{8}\right) = \left(\tfrac{8}{1}\right)\left(\tfrac{8}{9}\right).$$

§. 24.

Maintenant, pour résoudre ces systèmes d'équations, nous prendrons pour inconnues, pour chaque valeur de n, les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans lesquelles la somme $p+q=n-1$. Et, pour plus de symétrie, nous ferons en général:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right)=A_1;\quad \left(\frac{n-3}{2}\right)=A_2;\quad \left(\frac{n-4}{3}\right)=A_3;\quad \text{etc.}$$

Le choix de ces inconnues est le même que celui d'*Euler:* leur nombre est précisément exprimé par $\frac{n-2}{2}$ si n est *pair*, et par $\frac{n-1}{2}$ si n est *impair*.

Cela posé, voici les résultats qu'on obtient pour les premières valeurs de n, en se rappelant, que la lettre ω représente dans chaque cas la quantité $\frac{\pi}{n}$.

Pour $n = 3$.

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega}.$$

Pour $n = 4$.

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A_1 \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega} \qquad \left(\tfrac{3}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega}.$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 2\omega}$$

Pour $n = 5$.

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A_1 \cdot \frac{\sin 3\omega}{\sin 4\omega} \qquad \left(\tfrac{4}{1}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\omega \sin 3\omega}$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = A_2 \cdot \frac{\sin 3\omega}{\sin 4\omega} \qquad \left(\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 3\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{3}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin 4\omega}{\sin^2 3\omega} \qquad \left(\tfrac{4}{4}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 4\omega}.$$

Pour $n = 6$.

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A_1 \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin \omega} \qquad \left(\tfrac{4}{5}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 3\omega . \sin 4\omega}$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = A_2 \cdot \frac{\sin 3\omega}{\sin \omega} \qquad \left(\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_2^2} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 3\omega . \sin 4\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = A_2 \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin \omega} \qquad \left(\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\omega}{\sin 3\omega}$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{A_2^2}{A_1} \cdot \frac{\sin 3\omega}{\sin \omega} \qquad \left(\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 4\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 4\omega} \qquad \left(\tfrac{5}{5}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega}.$$

Relativement à ce cas, il faut observer que l'équation (L_1) rappellée dans le §. 22. donne

$$\left(\tfrac{4}{3}\right) = 2^{1-\frac{4}{3}} \left(\tfrac{2}{3}\right) = A \sqrt[3]{2}.$$

En égalant cette expression de $\left(\tfrac{4}{3}\right)$ à la précédente et observant, que $\sin 3\omega = 1$, $\sin \omega = \tfrac{1}{2}$, on aura

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt[3]{4}}.$$

En appliquant l'équation (L.) aux expressions de $(\frac{1}{1})$, $(\frac{4}{1})$, $(\frac{3}{2})$ on trouvera toujours cette même équation entre A_1 et A_2.

Pour $n = 7$.

$$(\tfrac{1}{1}) = A_1 \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin \omega}$$

$$(\tfrac{2}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin \omega}$$

$$(\tfrac{3}{1}) = A_3 \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin \omega}$$

$$(\tfrac{4}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin \omega}$$

$$(\tfrac{2}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin^2 4\omega}{\sin \omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{3}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 4\omega}{A_2}$$

$$(\tfrac{4}{4}) = \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 3\omega . \sin 4\omega}$$

$$(\tfrac{4}{3}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 4\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{4}{4}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 3\omega . \sin 4\omega}$$

$$(\tfrac{6}{2}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{3}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 4\omega}$$

$$(\tfrac{6}{4}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 3\omega}$$

$$(\tfrac{4}{5}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin \omega}{\sin 3\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{5}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin 4\omega}{\sin 3\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{6}) = \tfrac{1}{5} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdot \frac{\omega \sin 4\omega}{\sin \omega . \sin 3\omega}.$$

Pour $n = 8$.

$$(\tfrac{1}{1}) = A_1 \cdot \frac{\sin 6\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{2}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{3}{1}) = A_3 \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{4}{1}) = A_3 \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{5}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 6\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{2}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega}{\sin 6\omega . \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{3}{2}) = \frac{A_3^2}{A_2} \cdot \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega}{\sin 6\omega . \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{3}{3}) = \frac{A_3^2}{A_1} \cdot \frac{\sin 4\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{4}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{5}{4}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin 7\omega}{\sin 4\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{5}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin 7\omega}{\sin 5\omega . \sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{2}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{3}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{5}{3}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_3^2} \cdot \frac{\omega \sin 6\omega . \sin 7\omega}{\sin 4\omega . \sin^2 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{4}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin 7\omega}{\sin 4\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{6}{3}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{A_1}{A_3^2} \cdot \frac{\omega \sin 7\omega}{\sin 4\omega . \sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{7}{4}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 4\omega}$$

$$(\tfrac{5}{6}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin 7\omega}{\sin 5\omega . \sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{5}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{7}{6}) = \tfrac{1}{5} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{7}) = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\omega}{\sin 7\omega}.$$

Dans ce cas, l'équation ($L.$) donne

$$\left(\tfrac{3}{3}\right) = 2^{1-\frac{3}{4}}\left(\tfrac{3}{4}\right) = 2^{\frac{1}{4}}.A_3;$$

et par conséquent

$$\frac{A_3}{A_1}\cdot\frac{\sin 4\omega}{\sin 7\omega} = \sqrt[4]{2};$$

mais $\sin 4\omega = 1$, $\sin 7\omega = \sin\omega$; partant

$$A_3 = A_1.\sqrt[4]{2}.\sin\omega.$$

Les autres équations qu'on peut faire à l'aide de l'équation ($L.$) se réduisent à celle-ci ou à une identité.

Pour $n = 9$.

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A_1\cdot\frac{\sin 7\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = A_2\cdot\frac{\sin 6\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = A_3\,\frac{\sin 5\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{4}{1}\right) = A_4\cdot\frac{\sin 5\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{5}{1}\right) = A_3\cdot\frac{\sin 6\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{6}{1}\right) = A_2\cdot\frac{\sin 7\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{A_2 A_3}{A_1}\cdot\frac{\sin 5\omega.\sin 6\omega}{\sin 7\omega.\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{A_3 A_4}{A_1}\cdot\frac{\sin^2 5\omega}{\sin 7\omega.\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{4}{2}\right) = \frac{A_3 A_4}{A_1}\cdot\frac{\sin 5\omega.\sin 6\omega}{\sin 7\omega.\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{A_2 A_3}{A_1}\cdot\frac{\sin 6\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{3}{3}\right) = \frac{A_3^2 A_4}{A_1 A_2}\cdot\frac{\sin^2 5\omega}{\sin 7\omega.\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{4}{3}\right) = \frac{A_3 A_4}{A_1}\cdot\frac{\sin 5\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{5}{5}\right) = \frac{1}{A_2}\,\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 5\omega}$$

$$\left(\tfrac{6}{4}\right) = \frac{1}{A_3}\cdot\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{7}{3}\right) = \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 6\omega.\sin 7\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{2}\right) = \frac{1}{A_1}\cdot\frac{\omega}{\sin 7\omega}$$

$$\left(\tfrac{6}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{A_1}{A_3 A_4}\cdot\frac{\omega\sin 7\omega.\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 5\omega.\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{7}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{A_1}{A_2 A_3}\cdot\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\omega}{\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{A_3}\cdot\frac{\omega}{\sin 4\omega}$$

$$\left(\tfrac{7}{5}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{A_1}{A_3 A_4}\cdot\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 5\omega}$$

$$\left(\tfrac{6}{6}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{A_1 A_2}{A_3^2 A_4}\cdot\frac{\omega\sin 7\omega.\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 5\omega.\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{5}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{A_4}\cdot\frac{\omega}{\sin 4\omega}$$

$$\left(\tfrac{7}{6}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{A_1}{A_3 A_4}\cdot\frac{\omega\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 6\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{6}\right) = \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{A_3}\cdot\frac{\omega\sin 5\omega}{\sin 4\omega.\sin 8\omega}$$

$$\left(\tfrac{7}{7}\right) = \tfrac{1}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2 A_3}\cdot\frac{\omega\sin 5\omega.\sin 8\omega}{\sin 4\omega.\sin 6\omega.\sin 7\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{7}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\omega\sin 5\omega}{\sin 4\omega.\sin 7\omega}$$

$$\left(\tfrac{8}{8}\right) = \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\omega\sin 5\omega}{\sin 4\omega.\sin 8\omega}.$$

L'équation $\left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{p}{2p}\right) = 3^{1-\frac{3p}{n}}\left(\frac{p}{\frac{1}{3}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{3}n}\right)$, trouvée dans le §. 15., donne dans le cas actuel, en y faisant $p = 1$:

$$\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = 3^{\frac{2}{3}}\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right).$$

Donc en subsituant pour $(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{1})$, $(\frac{3}{1})$, $(\frac{6}{1})$ leurs valeurs et observant que $\sin 6\omega = \sin 3\omega = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura

$$A_3 = A_1 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin 3\omega}{\sin 4\omega} = \frac{A_1}{2\sqrt{3} \cdot \sin 4\omega};$$

ce qui réduit à trois les transcendantes auxiliaires.

Pour $n = 10$.

$$(\tfrac{1}{1}) = A_1 \cdot \frac{\sin 8\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{2}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 7\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{3}{1}) = A_3 \cdot \frac{\sin 6\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{4}{1}) = A_4 \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{5}{1}) = A_4 \cdot \frac{\sin 6\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{6}{1}) = A_3 \cdot \frac{\sin 7\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{7}{1}) = A_2 \cdot \frac{\sin 8\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{2}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}{\sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{3}{2}) = \frac{A_3 A_4}{A_1} \cdot \frac{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}{\sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{4}{2}) = \frac{A_4^2}{A_1} \cdot \frac{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}{\sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{5}{2}) = \frac{A_3 A_4}{A_1} \cdot \frac{\sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}{\sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{6}{2}) = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 7\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{3}{3}) = \frac{A_3 A_4^2}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin 5\omega \cdot \sin^2 6\omega}{\sin 7\omega \cdot \sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{4}{3}) = \frac{A_3 A_4^2}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}{\sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{5}{3}) = \frac{A_3 A_4}{A_1} \cdot \frac{\sin 6\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{4}{4}) = \frac{A_4^2}{A_1} \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 9\omega}$$

$$(\tfrac{6}{5}) = \frac{1}{A_4} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{2}{8}) = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\omega}{\sin 8\omega}$$

$$(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{1}{5}) = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 7\omega \cdot \sin 8\omega}$$

$$(\tfrac{6}{6}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_4^2} \cdot \frac{\omega \sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin^2 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{5}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_3 A_4} \cdot \frac{\omega \sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{8}{4}) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{9}{3}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{9}{4}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{6}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_3 A_4^2} \cdot \frac{\omega \sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin^2 6\omega}$$

$$(\tfrac{8}{5}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{A_1}{A_3 A_4} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{9}{5}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{A_4} \cdot \frac{\omega}{\sin 5\omega}$$

$$(\tfrac{8}{6}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{A_1}{A_4^2} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{7}{7}) = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_3 A_4^2} \cdot \frac{\omega \sin 8\omega \cdot \sin 9\omega}{\sin 5\omega \cdot \sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{8}{7}) = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{A_1}{A_3 A_4} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 6\omega \cdot \sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{9}{6}) = \tfrac{1}{5} \cdot \frac{1}{A_4} \cdot \frac{\omega}{\sin 6\omega}$$

$$(\tfrac{9}{7}) = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot \frac{\omega}{\sin 7\omega}$$

$$(\tfrac{8}{8}) = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{A_1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\omega \sin 9\omega}{\sin 7\omega \cdot \sin 8\omega}$$

$$(\tfrac{9}{8}) = \tfrac{1}{7} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\omega}{\sin 8\omega}$$

$$(\tfrac{9}{9}) = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\omega}{\sin 9\omega}.$$

Dans ce cas l'équation ($L.$) donne d'abord

$$\left(\tfrac{4}{4}\right) = 2^{1-\frac{4}{5}}\left(\tfrac{4}{1}\right) = 2^{\frac{1}{5}} A_4,$$

ou bien

$$\frac{A_4^2}{A_2} \cdot \frac{\sin 5\omega}{\sin 9\omega} = 2^{\frac{1}{5}} A_4;$$

mais $\sin 5\omega = 1$, $\sin 9\omega = \sin\omega$; partant

$$A_4 = A_1 \sqrt[5]{2} . \sin\omega.$$

La même équation ($L.$) donne aussi

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = 2^{1-\frac{2}{5}}\left(\tfrac{2}{1}\right);$$

ou bien, en substituant pour $\left(\tfrac{2}{2}\right)$, $\left(\tfrac{2}{1}\right)$ leurs valeurs:

$$A_2 = 2^{1-\frac{2}{5}} A_4; \quad \text{c'est-à-dire} \quad A_2 = A_4 \sqrt[5]{8} = A_1 2^{\frac{4}{5}} \sin\omega.$$

On a donc dans le cas de $n = 10$:

$$A_4 = A_1 \sqrt[5]{2} . \sin\omega; \quad A_2 = A_1 \sqrt[5]{2^4} . \sin\omega.$$

Les autres équations qu'on pourrait déduire de l'équation ($L.$) se réduisent à une identité. De sorte que, il suffit de connaître les deux transcendantes A_1 et A_3 pour pouvoir former toutes les autres.

§. 25.

En examinant les expressions de $\left(\frac{p}{q}\right)$ relatives à ces premières valeurs de n, on voit d'abord qu'on pourrait, dans chaque cas, les partager en deux parties: la première comprendra celles où $p+q < n-1$: la seconde comprendra celles où $p+q$ est égal ou plus grand que $n+1$. Le caractère distinctifs de ces dernières est, d'avoir pour facteur l'arc ω, et une fraction dont le numérateur est l'unité et le dénominateur le nombre entier $p+q-n$.

Après cela on observera, que l'expression la plus simple de ces fonctions est celle relative aux cas où un des deux nombres p ou q est égal à l'unité. D'abord, elles ont pour dénominateur commun $\sin(n-1)\omega = \sin\omega$; et afin de les rendre plus régulières il suffit d'observer, que $\sin i\omega = \sin(n-i)\omega$. Alors dans le cas de $n = 10$, par exemple on a:

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A_1 \frac{\sin 2\omega}{\sin\omega}; \quad \left(\tfrac{2}{1}\right) = A_2 \frac{\sin 3\omega}{\sin\omega}; \quad \left(\tfrac{3}{1}\right) = A_3 \frac{\sin 4\omega}{\sin\omega};$$

$$\left(\tfrac{4}{1}\right) = A_4 \frac{\sin 5\omega}{\sin\omega}; \quad \left(\tfrac{5}{1}\right) = A_4 \frac{\sin 6\omega}{\sin\omega}; \quad \left(\tfrac{6}{1}\right) = A_3 \frac{\sin 7\omega}{\sin\omega};$$

$$\left(\tfrac{7}{1}\right) = A_2 \frac{\sin 8\omega}{\sin\omega}.$$

Pour rendre manifeste la loi de ces expressions, il suffit de remarquer que, ayant fait

$$A_a = \left(\frac{n-a-1}{a}\right),$$

on a aussi, par la propriété fondamentale de ces fonctions:

$$A_a = \left(\frac{a}{n-a-1}\right);$$

et que par conséquent on doit établir l'équation

$$(L'.) \quad A_\rho = A_{n-\rho-1}.$$

Cela posé on pourra écrire, en général,

$$(L''.) \quad \left(\frac{a}{1}\right) = A_a \frac{\sin(a+1)\omega}{\sin\omega},$$

Cette formule serait ainsi établie par induction; mais il est facile de la démontrer *a priori* à l'aide de l'équation

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

qui, plus haut, a été désignée par (*E*.).

En effet, si nous changeons p en $n-p-1$, et si nous prenons ensuite $r=p$, cette formule donne

$$\left(\frac{n-p-1}{1}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right) = \left(\frac{n-p-1}{p}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right);$$

mais:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \frac{\omega}{\sin\omega}; \quad \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\omega}{\sin p\omega}; \quad \left(\frac{n-p-1}{p}\right) = A_p;$$

partant

$$\left(\frac{n-p-1}{1}\right)\frac{1}{\sin p\omega} = A_p \cdot \frac{1}{\sin\omega},$$

ou bien

$$\left(\frac{n-p-1}{1}\right) = A_p \cdot \frac{\sin p\omega}{\sin\omega} = A_p \cdot \frac{\sin.(n-p)\omega}{\sin\omega}.$$

Donc en observant que, $A_p = A_{n-p-1}$, il suffira de remplacer $n-p-1$ par la lettre a pour rendre cette équation conforme à la formule (*L''*.).

Après les fonctions de la forme $\left(\frac{a}{1}\right)$, celles dont l'expression est la plus simples sont telles, que les nombres p et q de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ donnent $p+q=n+1$. Dans le cas de $n=10$, par exemple, on peut les écrire ainsi:

$$(\tfrac{6}{5}) = \frac{1}{A_4}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 5\omega\ \sin 6\omega} = \frac{1}{A_4}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 5\omega\ \sin 4\omega};$$
$$(\tfrac{9}{2}) = \frac{1}{A_1}\cdot\frac{\omega}{\sin 8\omega} = \frac{1}{A_1}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 2\omega\ \sin\omega};$$
$$(\tfrac{7}{4}) = \frac{1}{A_3}\cdot\frac{\omega\sin 6\omega}{\sin 6\omega\ \sin 7\omega} = \frac{1}{A_3}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 4\omega\ \sin 3\omega};$$
$$(\tfrac{8}{3}) = \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 7\omega\ \sin 8\omega} = \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin 3\omega\ \sin 2\omega}.$$

Delà on tire, par induction:

$$(L'''.) \qquad \left(\frac{n-p+1}{p}\right) = \frac{1}{A_{p-1}}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin p\omega\,.\sin(p-1)\omega}.$$

Mais il est facile d'établir *a priori* cette formule.

En effet, l'équation

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

donne d'abord

$$\left(\frac{p-n+1}{p}\right)\left(\frac{n+1}{r}\right) = \left(\frac{n-p+1}{r}\right)\left(\frac{n-p+1+r}{p}\right),$$

maintenant, si l'on prend $r=p-1$, on a

$$\left(\frac{p-n+1}{p}\right)\left(\frac{n+1}{p-1}\right) = \left(\frac{n-p+1}{p-1}\right)\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{1}{p}\cdot\frac{\omega}{\sin(p-1)\omega}.$$

Mais la formule (69.) donne

$$\left(\frac{n+1}{p-1}\right) = \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{p-1}{1}\right);$$

donc, en appliquant la formule $(L''.)$ à la fonction $\left(\frac{p-1}{1}\right)$, on aura

$$\left(\frac{n+1}{p-1}\right) = \frac{1}{p}\cdot A_{p-1}\cdot\frac{\sin p\omega}{\sin\omega},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{p-n+1}{p}\right)A_{p-1}\cdot\frac{\sin p\omega}{\sin\omega} = \frac{\omega}{\sin(p-1)\omega};$$

c'est-à-dire la formule $(L'''.)$.

Après les deux cas que nous venons d'examiner, l'expression la plus simple des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ est celle des cas où $p+q=n-2$. On pourrait encore établir par induction la formule générale; mais il doit être sensible, dans ce moment, qu'on peut la trouver directement par l'équation

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

Car on a d'abord

$$\left(\frac{n-a-2}{a}\right)\left(\frac{n-2}{r}\right) = \left(\frac{n-a-2}{r}\right)\left(\frac{n-a-2+r}{a}\right).$$

Actuellement, si l'on fait ici $r=1$, on aura, à l'aide de la formule $(L''.)$:

$$\left(\frac{n-a-2}{a}\right)A_{n-2}\cdot\frac{\sin(n-1)\omega}{\sin\omega} = A_{n-a-2}\cdot\frac{\sin(n-a-1)\omega}{\sin\omega}\cdot A_a,$$

ou bien

$$\left(\frac{n-a-2}{a}\right) = \frac{A_a\cdot A_{n-a-2}}{A_{n-1}}\cdot\frac{\sin.(a+1)\omega}{\sin\omega};$$

ce qui donne, en ayant égard à la formule $(L'.)$:

$$(L^{\text{IV}}.)\quad \left(\frac{n-a-2}{a}\right) = \frac{A_a\cdot A_{a+1}}{A_1}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega}{\sin\omega}.$$

Pour déterminer de même la formule de la fonction $\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$, nous partirons de l'équation

$$\left(\frac{n-a-3}{a}\right)\left(\frac{n-3}{r}\right) = \left(\frac{n-a-3}{r}\right)\left(\frac{n-a-3+r}{a}\right),$$

laquelle, en y faisant $r=1$, donne

$$\left(\frac{n-a-3}{a}\right)A_{n-3}\cdot\frac{\sin(n-2)\omega}{\sin\omega} = A_{n-a-3}\cdot\frac{\sin(n-a-2)\omega}{\sin\omega}\cdot\frac{A_aA_{a+1}}{A_1}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega}{\sin\omega};$$

d'où l'on tire

$$(L^{\text{V}}.)\quad \left(\frac{n-a-3}{a}\right) = \frac{A_aA_{a+1}A_{a+2}}{A_1A_2}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\,.\sin(a+2)\omega}{\sin\omega\,.\sin2\omega}.$$

En général l'équation $(E.)$ donne

$$\left(\frac{n-a-i}{a}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right) = \left(\frac{n-a-i}{1}\right)\left(\frac{n-a-i+1}{a}\right),$$

ou bien

$$\left(\frac{n-a-i}{a}\right)A_{n-i}\sin(n-i+1)\omega = A_{n-a-i}\sin(n-a-i+1)\omega\left(\frac{n-a-i+1}{a}\right);$$

d'où l'on tire

$$(L^{\text{VI}}.)\quad \left(\frac{n-a-i}{a}\right) = \frac{A_{a+i-1}}{A_{i-1}}\cdot\frac{\sin(a+i-1)\omega}{\sin(i-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a-i+1}{a}\right).$$

Cette formule lie chaque cas suivant avec le cas précédent, et il devient manifeste que, en général, on a

$$(L^{\text{VII}}.)\quad \left(\frac{n-a-i}{a}\right) = \frac{A_aA_{a+1}A_{a+2}\dots A_{a+i-1}}{A_1A_2A_3\dots A_{i-1}}$$
$$\times\frac{\sin(a+1)\omega\,.\sin(a+2)\omega\,.\sin(a+3)\omega\dots\sin(a+i-1)\omega}{\sin\omega\,.\sin2\omega\,.\sin3\omega\dots\sin(i-1)\omega}.$$

Considérons maintenant les cas où $p+q>n+1$. Supposons d'abord $p+q=2$. L'équation $(E.)$ donne d'abord

$$\left(\frac{n-a+1}{a}\right)\left(\frac{n+1}{1}\right) = \left(\frac{n-a+1}{1}\right)\left(\frac{n-a+2}{a}\right).$$

Mais nous avons par la formule (69.)

$$\left(\frac{n+1}{1}\right) = \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{1}\right);$$

et par la formule ($L''.$):

$$\left(\frac{n-a+1}{1}\right) = A_{n-a+1}\frac{\sin(n-a+2)\omega}{\sin\omega} = A_{a-2}.\frac{\sin(a-2)\omega}{\sin\omega};$$

$$\left(\frac{n+1}{1}\right) = \tfrac{1}{2}A_1.\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega}:$$

partant

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{n-a+1}{a}\right)A_1\sin 2\omega = A_{a-2}\sin(a-2)\omega.\left(\frac{n-a+2}{a}\right).$$

Donc, en substituant pour $\left(\frac{n-a+1}{a}\right)$ sa valeur donnée par la formule ($L'''.$), on aura

$$(L^{\text{VIII}}.)\quad \left(\frac{n-a+2}{a}\right) = \tfrac{1}{2}.\frac{A_1}{A_{a-1}A_{a-2}}.\frac{\omega\sin\omega.\sin 2\omega}{\sin a\omega.\sin(a-1)\omega.\sin(a-2)\omega}.$$

La même équation ($E.$) donne

$$\left(\frac{n-a+2}{a}\right)\left(\frac{n+2}{1}\right) = \left(\frac{n-a+2}{1}\right)\left(\frac{n-a+3}{a}\right);$$

mais

$$\left(\frac{n+2}{1}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right) = \tfrac{2}{3}A_2\,\frac{\sin 3\omega}{\sin\omega};$$

$$\left(\frac{n-a+2}{1}\right) = A_{n-a+2}.\frac{\sin(a-3)\omega}{\sin\omega} = A_{a-3}.\frac{\sin(a-3)\omega}{\sin\omega};$$

partant

$$\tfrac{2}{3}\left(\frac{n-a+2}{a}\right)A_2\sin 3\omega = A_{a-3}\sin(a-3)\omega\left(\frac{n-a+3}{a}\right);$$

d'où on tire, à l'aide de la formule ($L^{\text{VIII}}.$);

$$(L^{\text{IX}}.)\quad \left(\frac{n-a+3}{a}\right) = \tfrac{1}{3}.\frac{A_1A_2}{A_{a-1}A_{a-2}A_{a-3}}.\frac{\omega\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega}{\sin a\omega.\sin(a-1)\omega.\sin(a-2)\omega.\sin(a-3)\omega}.$$

En général, l'équation ($E.$) donne

$$\left(\frac{n-a+i}{a}\right)\left(\frac{n+i}{1}\right) = \left(\frac{n-a+i}{1}\right)\left(\frac{n-a+i+1}{a}\right);$$

mais

$$\left(\frac{n+i}{1}\right) = \frac{i}{i+1}\left(\frac{i}{1}\right) = \frac{i}{i+1}A_i\frac{\sin(i+1)\omega}{\sin\omega},$$

$$\left(\frac{n-a+i}{1}\right) = A_{a-i-1}\,\frac{\sin(a-i-1)\omega}{\sin\omega};$$

partant

$$(L^{\text{X}}.)\quad \left(\frac{n-a+i}{a}\right)\frac{i}{i+i}A_i\sin(i+1)\omega = A_{a-i-1}\sin(a-i-1)\omega\left(\frac{n-a+i+1}{a}\right).$$

Et de là on conclut cette formule générale:

$$(L^{\text{XI}}.)\quad \left(\frac{n-a+i}{a}\right) = \frac{1}{i}.\frac{A_1A_2A_3\ldots.A_{i-1}}{A_{a-1}A_{a-2}A_{a-3}\ldots.A_{a-i}}$$

$$\times\frac{\omega\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega\ldots.\sin i\omega}{\sin a\omega.\sin(a-1)\omega.\sin(a-2)\omega\ldots.\sin(a-i)\omega}.$$

Après avoir ainsi parcouru tous les cas, voici réunies les formules qui les embrassent:

$$(H.)\begin{cases}\left(\frac{n-a-i}{a}\right)=\frac{A_a A_{a+1} A_{a+2}\dots A_{a+i-1}}{A_1 A_2 A_3\dots A_{i-1}} \\ \qquad\times\frac{\sin(a+1)\omega.\sin(a+2)\omega.\sin(a+3)\omega\dots\sin(a+i-1)\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega\dots\sin(i-1)\omega}; \\ \left(\frac{n-a+i}{a}\right)=\frac{1}{i}.\frac{A_1 A_2 A_3\dots A_{i-1}}{A_{a-1}A_{a-2}A_{a-3}\dots A_{a-i}} \\ \qquad\times\frac{\omega\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega\dots\sin i\omega}{\sin a\omega.\sin(a-1)\omega.\sin(a-2)\omega\dots\sin(a-i)\omega}; \\ \left(\frac{a}{1}\right)=A_a.\frac{\sin(a+1)\omega}{\sin\omega}; \\ \left(\frac{n-a+1}{a}\right)=\frac{1}{A_{a-1}}.\frac{\omega\sin\omega}{\sin a\omega.\sin(a-1)\omega}; \\ A_m=A_{n-m-1}.\end{cases}$$

La troisième et la quatrième de ces formules sont aussi comprises dans les deux premières; mais il est plus comode de les avoir écrites séparément.

La découverte de ces formules générales est due à *Legendre*. (Voyez le 1er Volume de ses Exerc. de Calc. Int. page 230.) Au lieu de les démontrer comme lui d'une manière rapide, j'ai préféré de les faire naître de l'examen des premiers cas particuliers. Car, je dois avouer que, c'est seulement après le calcul détaillé des formules relatives aux valeurs de $n=3, 4, 5, \dots 10$, que j'ai pu saisir l'esprit de la démonstration de *Legendre*. On objectera peut-être, que, *Euler* n'a pas réussi à découvrir ces formules, quoiqu'il eut développé la solution relative aux premières valeurs de n. Cela prouve seulement que, *Euler*, n'a pas imaginé le point capital de cette solution, qui consiste dans l'heureuse remarque faite par *Legendre*, que

$$A_m=A_{n-m-1}.$$

C'est par là qu'on fait disparaître la cause radicale qui cache la régularité des formules formées sans le concours de cette idée, inhérente à la nature de la notation qu'on emploie.

§. 26.

Nous avons vu dans le cas particuliers, comment la formule

$$G.\quad\left(\frac{n}{a}\right)=2^{1-\frac{2a}{n}}\left(\frac{a}{\frac{1}{2}n}\right),$$

donne lieu à des réductions dans le nombre des transcendantes auxiliaires, lorsque n est un nombre pair. Je vais faire voir qu'il suffit de combiner cette formule avec les formules (H.) pour construire les formules par lesquelles on peut opérer immédiatement une telle réduction pour chaque valeur donnée de n.

Soit $a=1$; on aura:

$$\left(\frac{1}{1}\right)=2^{1-\frac{2}{n}}\left(\frac{\frac{1}{2}n}{1}\right),$$

d'un autre côté, la 3me des équations (H.) donne

$$\left(\frac{1}{1}\right)=A_1.\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega};\quad \left(\frac{\frac{1}{2}n}{1}\right)=A_{\frac{1}{2}n}.\frac{\sin(\frac{1}{2}n+1)\omega}{\sin\omega}=A_{\frac{1}{2}n}.\frac{\cos\omega}{\sin\omega},$$

partant

$$A_1\sin 2\omega=2^{1-\frac{2}{n}}A_{\frac{1}{2}n}\cos\omega;$$

d'ou l'on tire

$$A_1\sin\omega=2^{-\frac{2}{n}}A_{\frac{1}{2}n};$$

et comme $A_{\frac{1}{2}n}=A_{n-\frac{1}{2}n-1}=A_{\frac{1}{2}n-1}$, on peut écrire

$$A_{\frac{1}{2}n-1}=2^{\frac{2}{\frac{1}{2}n}}.A_1\sin\omega.$$

Après avoir ainsi fait ce premier pas, voici de quelle manière on peut généraliser cette opération.

En faisant successivement $i=\frac{1}{2}n-a$; $i=n-2a$, la première des formules (H.) donne

$$(H'.)\begin{cases}\left(\frac{\frac{1}{2}n}{a}\right)=\frac{A_a A_{a+1} A_{a+2}\dots A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2 A_3\dots A_{\frac{1}{2}n-a-1}}\\ \qquad\times\frac{\sin(a+1)\omega.\sin(a+2)\omega.\sin(a+3)\omega\dots\sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega\dots\sin(\frac{1}{2}n-a-1)\omega};\\ \left(\frac{a}{a}\right)=\frac{A_a A_{a+1} A_{a+2}\dots A_{n-a-1}}{A_1 A_2 A_3\dots A_{n-2a-1}}\\ \qquad\times\frac{\sin(a+1)\omega.\sin(a+2)\omega.\sin(a+3)\omega\dots\sin(n-a-1)\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega.\sin 3\omega\dots\sin(n-2a-1)\omega}.\end{cases}$$

Ces formules donnent

$$\begin{aligned}\left(\frac{\frac{1}{2}n}{2}\right)&=\frac{A_2 A_3 A_4\dots A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2 A_3\dots A_{\frac{1}{2}n-3}}.\frac{\sin 3\omega.\sin 4\omega\dots\sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega\dots\sin(\frac{1}{2}n-3)\omega}\\&=\frac{A_{\frac{1}{2}n-2}A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1}.\frac{\sin(\frac{1}{2}n-2)\omega.\sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega}\\&=\frac{A_{\frac{1}{2}n-2}A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1}.\frac{\cos 2\omega.\cos\omega}{\sin\omega.\sin 2\omega};\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{A_2 A_3 A_4 \ldots . A_{n-3}}{A_1 A_2 A_3 \ldots . A_{n-5}} . \frac{\sin 3\omega . \sin 4\omega \ldots . \sin(n-3)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \ldots . \sin(n-5)\omega}$$

$$= \frac{A_{n-4} A_{n-3}}{A_1} . \frac{\sin(n-4)\omega . \sin(n-3)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega}$$

$$= \frac{A_3 A_2}{A_1} . \frac{\sin 4\omega . \sin 3\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega} .$$

Il suit de là et de la formule ($G.$), que

$$A_3 A_2 \sin 4\omega . \sin 3\omega = 2^{1-\frac{4}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\omega . \cos\omega ;$$

d'où l'on tire

$$A_3 A_2 \sin\omega . \sin 3\omega = 2^{-1-\frac{4}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} .$$

Mais on a trouvé plus haut que,

$$A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{\frac{2}{n}} A_1 \sin\omega ;$$

partant l'équation précédente donne

$$A_3 A_2 \sin 3\omega = 2^{-1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n}} A_{\frac{1}{2}n-2} A_1 .$$

On a donc ces deux formules générales:

$$H''. \quad A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{\frac{1}{\frac{1}{2}n}} A_1 \sin\omega , \quad A_{\frac{1}{2}n-2} = 2^{1+\frac{1}{\frac{1}{2}n}} \frac{A_3 A_2}{A_1} \sin 3\omega .$$

Les formules ($H'.$) donnent de même:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n}{3}\right) = \frac{A_3 A_4 A_5 \ldots . A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2 A_3 \ldots . A_{\frac{1}{2}n-4}} . \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega \ldots . \sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \ldots . \sin(\frac{1}{2}n-4)\omega}$$

$$= \frac{A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2} . \frac{\sin(\frac{1}{2}n-3)\omega . \sin(\frac{1}{2}n-2)\omega . \sin(\frac{1}{2}n-1)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}$$

$$= \frac{A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1}}{A_1 A_2} . \frac{\cos 3\omega . \cos 2\omega . \cos\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega} ;$$

$$\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{A_3 A_4 A_5 \ldots . A_{n-4}}{A_1 A_2 A_3 \ldots . A_{n-7}} . \frac{\sin 4\omega . \sin 5\omega \ldots . \sin(n-4)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega \ldots . \sin(n-7)\omega}$$

$$= \frac{A_{n-6} A_{n-5} A_{n-4}}{A_1 A_2} . \frac{\sin(n-6)\omega . \sin(n-5)\omega . \sin(n-4)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}$$

$$= \frac{A_5 A_4 A_3}{A_1 A_2} . \frac{\sin 6\omega . \sin 5\omega . \sin 4\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega} .$$

Cela posé l'équation ($G.$) donne

$$A_5 A_4 A_3 \sin 6\omega . \sin 5\omega . \sin 4\omega = 2^{1-\frac{6}{n}} A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} \cos 3\omega . \cos 2\omega . \cos\omega ;$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$A_5 A_4 A_3 \sin 5\omega . \sin 3\omega . \sin\omega = 2^{-2-\frac{6}{n}} A_{\frac{1}{2}n-3} A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} .$$

Mais, les équations ($H''.$) donnent

$$A_{\frac{1}{2}n-2} A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{1+\frac{4}{n}} A_2 A_3 \sin\omega . \sin 3\omega ;$$

partant

$$A_3 A_4 \sin 5\omega = 2^{-1-\frac{2}{n}} A_{\frac{1}{2}n-3} . A_2 .$$

Cette troisième équation étant ajoutée aux équations $(H''.)$, on obtient:

$$(H'''.) \quad \begin{cases} A_{\frac{1}{2}n-1} = 2^{\frac{1}{\frac{1}{2}n}} A_1 \sin\omega, \\ A_{\frac{1}{2}n-2} = 2^{1+\frac{1}{\frac{1}{2}n}} \dfrac{A_2 A_3}{A_1} \sin 3\omega, \\ A_{\frac{1}{2}n-3} = 2^{1+\frac{1}{\frac{1}{2}n}} \dfrac{A_4 A_5}{A_2} \sin 5\omega, \\ A_{\frac{1}{2}n-4} = 2^{1+\frac{1}{\frac{1}{2}n}} \dfrac{A_6 A_7}{A_3} \sin 7\omega, \\ A_{\frac{1}{2}n-5} = 2^{1+\frac{1}{\frac{1}{2}n}} \dfrac{A_8 A_9}{A_4} \sin 9\omega, \\ \text{etc.}; \end{cases}$$

car il est évident qu'on peut trouver de la même manière les valeurs de $A_{\frac{1}{2}n-4}$, $A_{\frac{1}{2}n-3}$ etc.

Tel est le procédé par lequel la formule

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \left(\frac{a}{\frac{1}{2}n}\right)$$

conduit aux formules $(H'''.)$ qui lient les auxiliaires primitives A_1, A_2, A_3 etc. dans le cas de n nombre *pair*. De là il est facile de conclure que le nombre des transcendantes absolument nécessaires se réduit à $\frac{n}{4}$ ou à $\frac{n-2}{4}$ suivant que $n=4i$ ou $n=4i+2$. *Legendre* a trouvé ces formules d'une toute autre manière; mais leur dérivation de la formule $(G.)$ me paraît digne de remarque.

§. 27.

L'équation

$$\left(\frac{p}{p}\right)\left(\frac{p}{2p}\right) = 3^{1-\frac{3p}{n}} \left(\frac{p}{\frac{1}{3}n}\right)\left(\frac{p}{\frac{2}{3}n}\right),$$

trouvee dans le §. 15., offre le moyen de former d'autres équations entre A_1, A_2 etc. pour les cas où n serait divisible par 3. Mais ces formules, faciles à construire par un procédé analogue à celui du §. précédent, sont trop compliquées lorsqu'on démande une solution générale. Je me borne à rapporter la plus simple de ses formules; c'est-à-dire celle relative à $p=1$: alors, on a

$$\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right) = 3^{1-\frac{3}{n}} \left(\frac{\frac{1}{3}n}{1}\right)\left(\frac{\frac{2}{3}n}{1}\right);$$

d'où on tire, par la troisième des formules (H.):

$$G'. \quad A_1 A_2 \sin 2\omega . \sin 3\omega = 3^{1-\frac{3}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right) A_{\frac{1}{3}n} A_{\frac{2}{3}n}.$$

Et comme $A_{\frac{1}{3}n} = A_{\frac{2}{3}n-1}$; $A_{\frac{2}{3}n} = A_{\frac{1}{3}n-1}$, on peut aussi écrire

$$G''. \quad A_1 A_2 \sin 2\omega . \sin 3\omega = 3^{1-\frac{3}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right) A_{\frac{1}{3}n-1} A_{\frac{2}{3}n-1}.$$

Pour faire une application de cette formule, je suppose $n = 12$. Alors on a d'abord

$$\left(\tfrac{10}{1}\right) = A_1; \quad \left(\tfrac{9}{2}\right) = A_2; \quad \left(\tfrac{8}{3}\right) = A_3; \quad \left(\tfrac{7}{4}\right) = A_4; \quad \left(\tfrac{6}{5}\right) = A_5;$$

et ensuite

$$A_6 = A_5; \quad A_7 = A_4; \quad A_8 = A_3; \quad A_9 = A_2; \quad A_{10} = A_1.$$

Les formules (H'''.) donnent

$$A_5 = 2^{\frac{1}{2}} A_1 \sin\omega; \qquad A_4 = 2^{\frac{1}{2}} \frac{A_2 A_3}{A_1} \sin 3\omega,$$

et la formule (G''.) donne

$$A_1 A_2 \sin 2\omega . \sin 3\omega = 3^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right) A_3 A_4;$$

ou bien

$$\frac{A_1 A_2}{A_3 A_4} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2\sin\omega} . \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right) . \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right)}{\cos\omega . \sin 3\omega}.$$

Mais $\omega = \frac{\pi}{n}$; partant

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right)}{\cos\omega . \cos 3\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ)}{\sin 75^\circ} = 1;$$

ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci:

$$\frac{A_1 A_2}{A_3 A_4} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2\sin\omega}.$$

Ainsi dans le cas de $n = 12$ on peut réduire à deux les transcendantes auxiliaires.

Legendre parvient aussi à la même conclusion (Voyez page 385 du 1er Vol. de son Traité des fonctions elliptiques); mais par l'intermédiaire des transcendantes elliptiques. Les nouvelles formules établies dans ce Mémoire ont l'avantage de fournir directement le rapport $\frac{A_1 A_2}{A_3 A_4}$.

Maintenant, voici de quelle manière on peut réduire les deux auxiliaires aux transcendantes elliptiques. D'abord j'observe, que, par les for-

mules ($H.$), on a

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{A_3 A_2}{A_1}\cdot\frac{\sin 8\omega\,.\,\sin 9\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega} = \frac{A_3 A_2}{A_1}\cdot\frac{\sin 4\omega\,.\,\sin 3\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega}.$$

Mais on vient de trouver

$$A_4 = 2^{\frac{1}{4}}\frac{A_2 A_3}{A_1}\sin 3\omega;$$

partant, nous avons

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{4}}.A_4\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega} = A_4\,.\,2^{-\frac{1}{4}}\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega};$$

et comme $\cos 2\omega = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, on peut écrire

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{4}}.\sqrt{3}.\frac{A_4}{\sin\omega}.$$

La formule ($\beta''.$), trouvée dans le §. 15., donne

$$\left(\tfrac{2}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}.\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}.$$

Donc en écrivant x^2 au lieu de x, on aura

$$A_4 = \sin\omega.\,2^{\frac{1}{4}}.3^{-\frac{1}{2}}.\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}.$$

Actuellement, si l'on fait ici, $x = (1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; et si, après la transformation, on remplace z par x, on aura:

$$A_4 = \sin\omega.2^{\frac{1}{4}}.3^{-\frac{1}{2}}.\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}.$$

Cela posé, si l'on fait $x = \sqrt[4]{3}.\cot\frac{1}{2}\varphi$; les limites de l'intégration par rapport à φ étant $\varphi = \pi$ et $\varphi = 0$, on obtiendra

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} = 3^{-\frac{1}{4}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{(2-\sqrt{3})}{4}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Mais $\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \sin^2 15^\circ$: donc, conformément à la notation de *Legendre*, on a

$$A_4 = 2^{\frac{1}{4}}.3^{-\frac{1}{4}}.\sin\omega.F'(\sin 15^0).$$

Les mêmes formules ($H.$) donnent

$$\left(\tfrac{3}{3}\right) = \frac{A_5 A_4 A_3}{A_1 A_2}\cdot\frac{\sin 6\omega\,.\,\sin 7\omega\,.\,\sin 8\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 2\omega\,.\,\sin 3\omega} = \frac{A_5 A_4 A_3}{A_1 A_2}\cdot\frac{\sin 4\omega}{2\sin^2\omega\,.\,\sin 3\omega}.$$

Mais on a trouvé plus haut

$$\frac{A_4 A_3}{A_1 A_2} = 3^{-\frac{1}{4}}.2\sin\omega;$$

partant

$$\left(\tfrac{3}{3}\right) = A_5.3^{-\frac{1}{4}}.\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega\,.\,\sin 3\omega} = 3^{-\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}.A_1.\frac{\sin 4\omega}{\sin 3\omega};$$

et comme $\frac{\sin 4\omega}{\sin 3\omega} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, on a

$$(\tfrac{3}{3}) = 3^{-\frac{1}{4}}.2^{-\frac{1}{4}}A_1 = 2^{1-\frac{2.3}{12}}.\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = \sqrt{2}.\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}.$$

Maintenant, par le changement de x en x^3 il viendra

$$A_1 = 3^{-\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}.\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

Donc en posant $x = \cos\varphi$, on aura

$$A_1 = 2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{4}}.F'(\sin 45^\circ).$$

Connaissant A_1 et A_4 il est facile d'avoir A_2.

En effet, les deux équations

$$A_4 = 2^{\frac{1}{2}}\frac{A_2 A_3}{A_3}\sin 3\omega; \qquad \frac{A_3 A_4}{A_3 A_2} = 2.3^{-\frac{1}{4}}.\sin\omega$$

donnent

$$A_4 = 2^{\frac{1}{2}}\frac{A_2}{A_3}\sin 3\omega.\frac{A_3 A_2}{A_4}2.3^{-\frac{1}{4}}\sin\omega,$$

ou bien

$$A_4^2 = A_2^2.2^{\frac{12}{4}}.3^{-\frac{1}{4}}.\sin\omega.\sin 3\omega;$$

d'où l'on tire

$$A_4 = A_2.2^{\frac{1}{2}}.3^{-\frac{1}{8}}\sqrt{(\sin\omega)},$$

et en substituant pour A_4 sa valeur, on aura

$$A_2 = 3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{(\sin\omega)}.F'(\sin 15^\circ).$$

De cette manière, le cas de $n = 12$ est complètement résolu.

J'ai déjà donné l'exemple d'une réduction de ce genre dans le cas de $n = 9$: mais pour mieux fixer les idées sur ce qui se passe à l'égard des nombres composés impairs, je vais d'abord considérer le cas de $n = 15$.

Ici on a:

$(\tfrac{13}{1}) = A_1$; $(\tfrac{12}{2}) = A_2$; $(\tfrac{11}{3}) = A_3$; $(\tfrac{10}{4}) = A_4$; $(\tfrac{9}{5}) = A_5$; $(\tfrac{8}{6}) = A_6$; $(\tfrac{7}{7}) = A_7$;
$A_8 = A_6$; $A_9 = A_5$; $A_{10} = A_4$; $A_{11} = A_3$; $A_{12} = A_2$; $A_{13} = A_1$.

Cela posé la formule (G''.) donne

$$A_1 A_2.\sin 2\omega.\sin 3\omega = 3^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\omega\right).A_4 A_6.$$

En faisant $p = 1$, la formule (β^x.) trouvée dans le §. 15. donne dans le cas actuel:

$$(\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})(\tfrac{3}{1})(\tfrac{4}{1}) = 5^{1-\frac{1}{2}}(\tfrac{3}{1})(\tfrac{6}{1})(\tfrac{9}{1})(\tfrac{12}{1});$$

d'où on tire par l'application de la troisième des formules (H.)

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \sin 2\omega.\sin 3\omega.\sin 4\omega.\sin 5\omega$$
$$= 5^{\frac{1}{2}} A_3 A_6 A_5 A_2 \sin 4\omega.\sin 7\omega.\sin 10\omega.\sin 13\omega.$$

Mais $\sin 13\omega = \sin 2\omega$; $\sin 10\omega = \sin 5\omega$; partant

$$A_1 A_4 \sin 3\omega = 5^{\frac{3}{4}} A_5 A_6 \sin 7\omega.$$

Il suit de là qu'on peut obtenir les valeurs de A_5 et A_6 par A_1, A_2, A_4: ce qui réduit à 5 les quantités auxiliaires.

Examinons maintenant la réduction que présente le cas de $n = 27$ dans le nombre des transcendantes auxiliaires.

Ici nous avons:

$$\left(\tfrac{25}{1}\right) = A_1;\quad \left(\tfrac{24}{2}\right) = A_2;\quad \left(\tfrac{23}{3}\right) = A_3;\quad \left(\tfrac{22}{4}\right) = A_4;\quad \left(\tfrac{21}{5}\right) = A_5;$$
$$\left(\tfrac{20}{6}\right) = A_6;\quad \left(\tfrac{19}{7}\right) = A_7;\quad \left(\tfrac{18}{8}\right) = A_8;\quad \left(\tfrac{17}{9}\right) = A_9;\quad \left(\tfrac{16}{10}\right) = A_{10};$$
$$\left(\tfrac{15}{11}\right) = A_{11};\quad \left(\tfrac{14}{12}\right) = A_{12};\quad \left(\tfrac{13}{13}\right) = A_{13};\quad A_{14} = A_{12};\quad A_{15} = A_{11};$$
$$A_{16} = A_{10};\quad A_{17} = A_9;\quad A_{18} = A_8;\quad A_{19} = A_7;\quad A_{20} = A_6;$$
$$A_{21} = A_5;\quad A_{22} = A_4;\quad A_{23} = A_3;\quad A_{24} = A_2;\quad A_{25} = A_1.$$

La formule $(G''.)$ donne

$$A_1 A_2 \sin 2\omega . \sin 3\omega = 3^{\frac{1}{9}} . \sin\left(\frac{\pi}{3} + \omega\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) A_8 A_9.$$

La formule générale rapportée au commencement de ce §. donne

$$\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right) = 3^{\frac{7}{9}} . \left(\tfrac{9}{2}\right)\left(\tfrac{18}{2}\right);$$
$$\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right) = 3^{\frac{4}{9}} . \left(\tfrac{9}{3}\right)\left(\tfrac{18}{3}\right);$$
$$\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{8}{4}\right) = 3^{\frac{1}{9}} . \left(\tfrac{9}{4}\right)\left(\tfrac{18}{4}\right).$$

De la première des formules $(H.)$ on tire

$$\left(\frac{n-2-i}{2}\right) = \frac{A_i A_{i+1}}{A_1} . \frac{\sin i\omega . \sin(i+1)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega};$$
$$\left(\frac{n-3-i}{3}\right) = \frac{A_i A_{i+1} A_{i+2}}{A_1 A_2} \frac{\sin i\omega . \sin(i+1)\omega . \sin(i+2)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega}$$
$$\left(\frac{n-4-i}{4}\right) = \frac{A_i A_{i+1} A_{i+3} A_{i+4}}{A_1 A_2 A_3} . \frac{\sin i\omega . \sin(i+1)\omega \sin(i+2)\omega . \sin(i+3)\omega}{\sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega . \sin 4\omega}.$$

Cela posé, les trois équations précédentes donneront celles-ci:

$$\left\{\begin{aligned} & A_2 A_3 A_4 A_6 . \sin 3\omega . \sin 4\omega . \sin 5\omega . \sin 6\omega \\ = {} & 3^{\frac{7}{9}} A_7 A_8 A_9 A_{10} . \sin 7\omega . \sin 8\omega . \sin 10\omega . \sin 11\omega; \\ & A_3 A_4 A_5 . \sin 4\omega . \sin 5\omega . \sin 9\omega \\ = {} & 3^{\frac{2}{9}} A_9 A_{10} A_{11} . \sin 10\omega . \sin 11\omega . \sin 12\omega; \\ & A_4 \sin 9\omega = 3^{\frac{5}{9}} . A_{12} \sin 13\omega. \end{aligned}\right.$$

On voit par-là, que les transcendantes A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} peuvent être déterminées à l'aide des inférieures A_1, A_2, ... A_8. De sorte que on peut réduire à neuf les transcendantes auxiliaires. L'équation

$$\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{10}{5}\right) = 3^{\frac{1}{9}} \left(\tfrac{9}{5}\right)\left(\tfrac{18}{5}\right)$$

ne conduit à aucune réduction nouvelle, comme on peut s'en convaincre par la formation directe de cette équation.

Je borne là les exemples de ce genre: ceux que je viens d'exposer suffisent pour montrer ce qu'on doit faire dans chaque cas particulier.

§. 28.

Parmi les intégrales définies qu'on peut ramener aux intégrales *Eulériennes*, considérons celle-ci,

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

On peut opérer cette réduction de deux manières: 1°. en posant $z^n = \frac{1-x^n}{x^n}$; alors on obtient

$$71.\quad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}n-a-1}dx(1-x^n)^{\frac{a}{n}-1};$$

2°. en posant $z^n = \frac{4(1-x^n)}{x^{2n}}$: alors on obtient

$$72.\quad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = 2^{\frac{2a}{n}}\int_0^1 x^{n-2a-1}dx(1-x^n)^{\frac{a}{n}-1}.$$

Dans les deux cas, on doit avoir $\frac{1}{2}n > a$, ou bien $\frac{1}{2}n = a$. Il est d'ailleurs évident, que la valeur de cette intégrale serait infinie, si on avait $a > \frac{1}{2}n$. Mais, en ce cas, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$$

serait finie: et par le changement de a en $n-a$, les équations (71.) et (72.) donnent

$$73.\quad \int_0^\infty \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = \int_0^1 x^{a-\frac{1}{2}n-1}dx(1-x^n)^{\frac{n-a}{n}-1};$$

$$74.\quad \int_0^\infty \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = 2^{2-\frac{2a}{n}}.\int_0^1 x^{2a-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{n-a}{n}-1}.$$

Il suit de là, qu'on a

$$75.\quad \left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}}\left(\frac{n-2a}{a}\right) \;\ldots\ldots\; \frac{1}{2}n > a;$$

$$76.\quad \left(\frac{a-\frac{1}{2}n}{n-a}\right) = 2^{2-\frac{2a}{n}}\left(\frac{2a-n}{n-a}\right) \;\ldots\ldots\; \frac{1}{2}n < a.$$

Le rapport fort simple, qu'on découvre ainsi entre ces intégrales Eulériennes, devient plus remarquable, lorsque on le rapproche de l'expression beaucoup plus compliquée, que ce même rapport aurait en le tirant des formules générales (*H.*).

L'équation (E.) d'*Euler* ne conduirait pas aux équations (75.) et (76.): mais, par sa combinaison avec ces dernières, on en tire d'autre résultats remarquables par leur simplicité. Faisons d'abord dans l'équation

$$E.\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right);$$

$p = n-2a$; $q = a$; on aura

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right)\left(\frac{n-a}{r}\right) = \left(\frac{n-2a}{r}\right)\left(\frac{n-2a+r}{a}\right);$$

et en faisant ici $r = 2a$, il viendra

$$77.\quad \left(\frac{n-2a}{a}\right)\left(\frac{n-a}{2a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{\omega}{\sin 2a\omega}.$$

Cette équation combinée avec l'équation (75.) on en tire

$$78.\quad \left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right)\left(\frac{n-a}{2a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}}\frac{a}{a\sin 2a\omega}.$$

La même équation (E.), en y faisant $p = q = a$, $r = n-a$ donne

$$79.\quad \left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{n-a}{2a}\right) = \frac{\omega}{a\sin a\omega}.$$

De là et de l'équation précédente on conclud, que

$$80.\quad \left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}}\cos a\omega.\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right).$$

La fonction $\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right)$ a la propriété de démeurer la même en y changeant a en $\frac{1}{2}n-a$; partant on a

$$81.\quad \left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}}\sin a\omega.\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right).$$

Donc en éliminant $\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right)$ entre ces deux dernières équations, il viendra

$$82.\quad \left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{4a}{n}}\cot a\omega\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right);$$

c'est-à-dire l'équation trouvée par *Legendre* en 1794. Elle donne pour la réduction des auxiliaires A_1, A_2 etc. les mêmes formules (H'''.) que nous avons trouvées autrement dans le §. 26,

En rapprochant de l'équation (80.), l'équation (71.) et l'équation (β''.) trouvé au commencement du §. 15. on en tire la conséquence, que

$$83.\quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos\frac{a\pi}{n}.\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1+x^n)}} \;\ldots\ldots\; a < \tfrac{1}{2}n.$$

A l'aide de l'équation (76.), on peut trouver une équation analogue relative au cas de $a > \frac{1}{2}n$.

En prenant $p=2a-n$, $q=n-a$, l'équation (E.) donne

$$\left(\frac{2a-n}{n-a}\right)\left(\frac{a}{r}\right) = \left(\frac{2a-n}{r}\right)\left(\frac{2a-n+r}{n-a}\right);$$

actuellement, si l'on fait ici, $r=2n-2a$, il viendra

$$84.\quad \left(\frac{2a-n}{n-a}\right)\left(\frac{a}{2n-2a}\right) = \frac{\omega}{(n-a)\sin(2a-n)\omega};$$

et en éliminant $\left(\frac{2a-n}{n-a}\right)$ par la substitution de sa valeur donnée par l'équation (76.), nous aurons

$$85.\quad \left(\frac{a-\frac{1}{2}n}{n-a}\right)\left(\frac{2n-2a}{a}\right) = -2^{2-\frac{2a}{n}}\frac{\omega}{(n-a)\sin 2a\omega}.$$

La même équation (E.), en y faisant $p=q=n-a$, $r=a$ donne

$$86.\quad \left(\frac{n-a}{n-a}\right)\left(\frac{2n-2a}{a}\right) = \frac{\omega}{(n-a)\sin a\omega}.$$

Donc en divisant ces deux dernières équations, on aura

$$87.\quad \left(\frac{n-a}{n-a}\right) = -2^{-1+\frac{2a}{n}}\cos a\omega.\left(\frac{a-\frac{1}{2}n}{n-a}\right).$$

Mais la formule (β''.) citée plus haut, donne

$$88.\quad \left(\frac{n-a}{n-a}\right) = 2^{-1+\frac{2a}{n}}.\int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}};$$

partant l'équation précédente est (en vertu de l'équation (73.)) équivalente à celle-ci

$$89.\quad \int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = -\cos a\frac{\pi}{n}.\int_0^\infty \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}} \quad \ldots\ldots \quad a>\tfrac{1}{2}n,$$

ou bien à celle-ci:

$$90.\quad \int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos(n-a)\frac{\pi}{n}.\int_0^\infty \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}} \quad \ldots\ldots \quad a>\tfrac{1}{2}n.$$

De sorte qu'on peut concentrer dans une seule équation les deux équations (83.) et (90.). Mais, pour la clarté des idées il convient de les laisser séparées.

Cette séparation va nous servir pour en tirer une conséquence qui paraît éloignée. Voici en quoi elle consiste. Soit

$$Z = z^{a-\frac{1}{2}n}.\sqrt{(1+z^n)} - z^a.$$

En différentiant cette expression, et intégrant ensuite depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, on obtient, en observant qu'à ces deux limites $Z=0$:

$$91.\quad \int_0^\infty \left[z^{a-1}\,dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right] = \frac{2a-n}{2a}.\int_0^\infty \frac{z^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

Cela posé, si l'on change z en $\frac{1}{z}$ dans le second membre de cette équa-

tion seulement, on a

$$92. \quad \int_0^\infty \frac{z^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = \int_0^\infty \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

Partant l'équation (91.) revient à dire, que

$$93. \quad \int_0^\infty \left[x^{a-1}\,dx - \frac{x^{a+\frac{1}{2}n-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}}\right] = \frac{2a-n}{2a}.\int_0^\infty \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}}.$$

D'après cela l'équation (90.) devient équivalente à celle-ci:

$$94. \quad \int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{2a}{2a-n}.\cos a\frac{\pi}{n}.\int_0^\infty \left[\frac{x^{a+\frac{1}{2}n-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}} - x^{a-1}\,dx\right].$$

Rien n'empêche de remplacer ici la lettre a par $a-\frac{1}{2}n$; alors on a:

$$95. \quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{a-\frac{1}{2}n}{n-a}.\sin a\frac{\pi}{n}.\int_0^\infty \left[x^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dx - \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}}\right].$$

Au lieu de cette équation, je vois l'équation

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos a\frac{\pi}{n}.\int_0^\infty \left[\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}} - x^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dx\right]$$

dans la page 95 du *Mémoire sur les transcendantes elliptiques,* publié par *Legendre* en 1794. Mais je pense qu'il y a là quelque méprise: car en exécutant la transformation indiquée par *Legendre* je ne trouve pas ce résultat.

En rapprochant de l'équation (88.) l'équation (K''.) obtenue dans le §. 20. nous aurons

$$96. \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.\int_0^\infty \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1+x^n)}} = \frac{2\pi}{n(2a-n)\sin\frac{a\pi}{n}}.$$

Turin le 16. Avril 1836.

10.

De aequatione $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda.

(Auctore, *E. E. Kummer*, Dr. phil., praeceptore gymnasii Lignicensis.)

Quod clarissimus *Fermat* contendit: aequationem $x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$ per numeros integros resolvi non posse, haud dubie ad elegantissima theoremata referendum est, quae de numerorum proprietatibus hactenus proposita sunt, cujus autem demonstratio gravissimis difficultatibus videtur laborare. Quamquam enim incrementa permagna nostris temporibus theoria numerorum accepit, tamen geometrae clarissimi, qui huic theoremati operam tribuerunt, paucos solummodo casus simpliciores demonstrationibus munire potuerunt. *Cl. Euler, Legendre* et *Lejeune Dirichlet* pro potestatibus tertiis, quartis, quintis et decimis quartis theorematis hujus demonstrationes invenerunt, quae in eo conveniunt, ut ex aequatione proposita alia ejusdem formae aequatio eliciatur, cujus numari variabiles minores sint quam aequationis datae variabiles; artificia autem per quae ad hanc aequationem similem pervenerunt, pro potestatibus diversis maxime diversa sunt, neque ad alios casus applicationes patiuntur. Itaque res non multum profecit. In re tam difficili, nisi omni proventu carere volumus, a facilioribus incipiendum esse nobis necessarium videtur, itaque aequationem Fermatianam pro potestatum indicibus paribus, nobis tractandam proponimus. Hanc etiam disquisitionem faciliorem ad finem perducere nondum nobis contigit, attamen summas aliquas, quae hanc rem quodammodo promovere videntur cum geometris communicabimus.

Disquisitio nostra praesertim huic theorematis innititur:

Theorema 1. „Si n est numerus primus, atque a et b inter se primi, quantitates $a\pm b$ et $\frac{a^n\pm b^n}{a\pm b}$ non habet factorem communem, nisi numerum n, si vero $a^n\pm b^n$ habet factorem n, eundem etiam $a\pm b$ habere debet, et numerus factorum n in $a^n\pm b^n$ numerum factorum n in $a\pm b$ unitate superat.

Hujus theorematis veritas facile probatur ex aequatione identica

$$1.\quad \frac{a^n \pm b^n}{a \pm b} = (a \pm b)^{n-1} \mp n(a \pm b)^{n-3} ab + \frac{n(n-3)}{1.2.}(a \pm b)^{n-5} a^2 b^2 \mp \ldots$$
$$\ldots (\mp 1)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1.2.3\ldots h}(a \pm b)^{n-2h-1} a^h b^h + \ldots (\mp 1)^{\frac{n-1}{2}} n(ab)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Si enim $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$ et $a \pm b$ factorem communem habent, etiam $n(ab)^{\frac{n-1}{2}}$ (terminus solus ad dextram aequationis (1.), qui factorem $a \pm b$ non continet) per eundem factorem divisibilis esse debet, et quia ab et $a \pm b$ inter se primi sunt, maximus factor communis quem quantitates $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$ et $a \pm b$ habere possunt, erit numerus n. Ad alteram theorematis partem demonstrandam observo coefficientes omnes

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-3)}{1.2.}, \quad \ldots \quad \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1.2.3\ldots h}, \quad \ldots$$

quia integri sunt, et numerus primus n e numeratore per denominatoris factores minores tolli nequit, per n esse divisibiles. Inde sequitur $a^n \pm b^n$ factorem n continere non posse, nisi simul $a \pm b$ per n est divisibilis, positisque $a^n \pm b^n = C.n^\varkappa$ et $a \pm b = c.n^\lambda$ ex aequatione (1.) sequitur $\lambda = \varkappa - 1$, id quod demonstrandum erat.

Quibus praeparatis ad aequationem propositam vertamur:

$$2.\quad x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}.$$

Salva quaestionis generalitate numeros x, y, z inter se primos accipimus, et λ numerum primum, si enim duo numerorum x, y, z factorem communem haberent, per eundem etiam tertius numerus divisibilis esset, atque hic factor omnium communis tolleretur, porro si λ esset numerus compositus e factoribus primis $\lambda = \alpha.\beta.\gamma\ldots$, aequatione $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ satisfieri non posset, nisi aequationes $x'^{2\alpha} + y'^{2\alpha} = z'^{2\alpha}$, $x''^{2\beta} + y''^{2\beta} = z''^{2\beta}$ etc. omnes simul per numeros integros solvi possent. Praeterea patet numerorum x, y, z unum parem ceteros impares esse et quia summa duorum quadratorum inter se primorum per altiorem potestatem ipsius 2 non est divisibilis, sequitur hunc numerum parem non esse z, sed alterum numerorum x et y. Hunc numerum parem nos ubique accipiemus esse y.

Jam theorema supra demonstratum ad aequationem propositam applicemus. Cui si forma datur:

$$3.\quad (z^2 - y^2)\left(\frac{z^{2\lambda} - y^{2\lambda}}{z^2 - y^2}\right) = x^{2\lambda}$$

patet primo, si x factorem λ non continet, quia z^2-y^2 et $\frac{z^{2\lambda}-y^{2\lambda}}{z^2-y^2}$ inter se primi sunt, esse

$$4.\quad z^2-y^2=a^{2\lambda}$$

et quia $z+y$ et $z-y$ factorem communem non habent

$$5.\quad z+y=v^{2\lambda},\quad z-y=\omega^{2\lambda}.$$

Si vero x per λ divisibilis est, maximaque potestas ipsius λ quae in x continetur est λ^{μ}, $x^{2\lambda}$, ideoque $z^{2\lambda}-y^{2\lambda}$ habent factorem $\lambda^{2\lambda\mu}$, itaque per theorema (1.) z^2-y^2 continebit factorem $\lambda^{2\lambda\mu-1}$, denique quia solo factore communi λ excepto z^2-y^2 et $\frac{z^{2\lambda}-y^{2\lambda}}{z^2-y^2}$ inter se primi sunt, esse debet

$$6.\quad z^2-y^2=\lambda^{2\lambda\mu-1}a^{2\lambda}$$

unde

$$7.\quad z\pm y=\lambda^{2\lambda\mu-1}v^{2\lambda},\quad z\mp y=\omega^{2\lambda}.$$

Simili modo ex aequatione $z^{2\lambda}-x^{2\lambda}=y^{2\lambda}$, si y factorem λ non continet, sequitur

$$8.\quad z^2-x^2=b^{2\lambda},$$

Per hypothesin est y numerus par, z et x impares, itaque si maxima potestas ipsius 2, quae in y continetur est 2^{ν}, $z^{2\lambda}$ habet factorem $2^{2\lambda\nu}$, eundem factorem habet z^2-x^2, inde quia maximus divisor communis numerorum $z+x$ et $z-x$ est 2, sequitur

$$9.\quad z\pm x=2.p^{2\lambda},\quad z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda}.$$

Si vero y per λ divisibilis est, et maxima potestas ipsius λ quae in y continetur est λ^{μ}, per theorema (1.) erit

$$10.\quad z^2-x^2=\lambda^{2\lambda\mu-1}b^{2\lambda}.$$

Praeterea si accipimus maximam potestatem numeri 2 quae in y continetur esse 2^{ν}, quia etiam b eundem factorem 2^{ν} habere debet, erit

$$11.\quad \text{sive}\quad z\pm x=2.p^{2\lambda}\qquad \text{et}\quad z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q,$$

$$12.\quad \text{sive}\quad z\pm x=2.\lambda^{2\lambda\mu-1}p^{2\lambda}\quad \text{et}\quad z\pm x=2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda}.$$

Inde quatuor casus speciales erunt discernendi, primus quo neuter numerorum x et y per λ est divisibilis, secundus quo numerus impar x factorem λ habet, tertius et quartus casus, quibus numerus par y per λ divisibilis est. Pro singulis iis casibus est:

$$13.\begin{cases}\text{I.}\ z+y=v^{2\lambda}, & z-y=\omega^{2\lambda},\ z\pm x=2p^{2\lambda}, & z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}q^{2\lambda},\\ \text{II.}\ z\pm y=\lambda^{2\lambda\mu-1}.v^{2\lambda}, & z\mp y=\omega^{2\lambda},\ z\pm x=2p^{2\lambda}, & z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}q^{2\lambda},\\ \text{III.}\ z+y=v^{2\lambda}, & z-y=\omega^{2\lambda},\ z\pm x=2p^{2\lambda}, & z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda},\\ \text{IV.}\ z+y=v^{2\lambda}, & z+y=\omega^{2\lambda},\ z\pm x=2.\lambda^{2\lambda\mu-1}.p^{2\lambda}, & z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda},\end{cases}$$

ex quibus deducuntur formae numerorum x, y, z:

$$
14. \left\{
\begin{array}{ll}
\text{I. } z = \dfrac{v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda}}{2}, & y = \dfrac{v^{2\lambda}-\omega^{2\lambda}}{2}, \\
\quad z = p^{2\lambda}+2^{2\lambda n-2}.q^{2\lambda}, & \pm x = p^{2\lambda}-2^{2\lambda n-2}.q^{2\lambda}; \\
\text{II. } z = \dfrac{\lambda^{2\lambda\mu-1}.v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda}}{2}, & \pm y = \dfrac{\lambda^{2\lambda\mu-1}v^{2\lambda}-\omega^{2\lambda}}{2}, \\
\quad z = p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}, & \pm x = p^{2\lambda}-2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}; \\
\text{III. } z = \dfrac{v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda}}{2}, & y = \dfrac{v^{2\lambda}-\omega^{2\lambda}}{2}, \\
\quad z = p^{2\lambda}+2^{2\lambda n-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda}, & \pm x = p^{2\lambda}-2^{2\lambda-2}.\lambda^{\mu-1}.q^{2\lambda}; \\
\text{IV. } z = \dfrac{v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda}}{2}, & y = \dfrac{v^{2\lambda}-\omega^{2\lambda}}{2}, \\
\quad z = \lambda^{2\lambda\mu-1}.p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-2}.q^{2\lambda}, & \pm x = \lambda^{2\lambda\mu-1}.p^{2\lambda}-2^{2\lambda\nu-2}.q^{2\lambda};
\end{array}
\right.
$$

formisque binis ipsius z aequalibus positis est

$$
15. \left\{
\begin{array}{ll}
\text{I. } v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda} & = 2p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda}, \\
\text{II. } \lambda^{2\lambda\mu-1}\, v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda} & = 2p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda}, \\
\text{III. } v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda} & = 2p^{2\lambda}+2^{2\lambda n-1}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda}, \\
\text{IV. } v^{2\lambda}+\omega^{2\lambda} & = 2.\lambda^{2\lambda\mu-1}.p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-1}.q^{2\lambda}.
\end{array}
\right.
$$

In omnibus iis aequationibus numeri v, ω, p et q impares et inter se primi sunt, numeri v et ω factores ipsius x, et p et q factores numeri y.

Ex aequatione proposita $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$, sequitur etiam $(z^{\lambda}+y^{\lambda})(z^{\lambda}-y^{\lambda})=x^{2\lambda}$, et quia factores $z^{\lambda}+y^{\lambda}$ et $z^{\lambda}-y^{\lambda}$ inter se primi sunt:

$$16. \quad z^{\lambda}+y^{\lambda}=A^{2\lambda}, \qquad z^{\lambda}-y^{\lambda}=B^{2\lambda},$$

simili modo est $(z^{\lambda}\pm x^{\lambda})(z^{\lambda}\mp x^{\lambda})=y^{2\lambda}$, unde quia maximus factor communis numerorum $z^{\lambda}\pm x^{\lambda}$ et $z^{\lambda}\mp x^{\lambda}$ est 2, et per hypothesin maxima potestas ipsius 2, quam y continet est 2^{ν}, habetur

$$17. \quad z^{\lambda}\pm x^{\lambda}=2.C^{2\lambda}, \qquad z^{\lambda}\mp x^{\lambda}=2^{2\lambda\nu-1}.D^{2\lambda}.$$

Signa ambigua $\pm$ et $\mp$ ita accipienda sunt, ut cum signis aequationum (13.), (14.) et (15.) conveniant, ubi enim in illis aequationibus signa superiora vel inferiora valent, eadem etiam in his valebunt.

Quum probabile sit omnes quatuor casus quos supra separavimus non pro omnibus numeris λ locum habituros esse, dijudicandum videtur: quinam casus ad certos numeros λ possint pertinere. Primum accipiamus numerum primum λ talem esse ut etiam $2\lambda+1$ sit numerus primus, id quod ex. gr. evenit pro numeris $\lambda=3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, \ldots$ et pro alliis innumeris. Quo posito inquiramus an aequationum (13.) utraeque partes secundum modulum $2\lambda+1$ congruae esse possint. Quia per

cognitum theorema omnis potestas $2\lambda^{ta}$ unitati congrua est modulo $2\lambda+1$ (numero primo) nisi per $2\lambda+1$ est divisibilis, facile cognosci potest aequationum (15.) casus I. et III. consistere non posse, nisi q per $2\lambda+1$ divisibilis sit, sed casus II. et IV. nullomodo locum habere (casu $\lambda=3$ excepto). Praeterea demonstrari potest etiam primum casum rejiciendum esse, est enim identice

$$18.\qquad \frac{z^{2\lambda}-x^{2\lambda}}{z^2-x^2}=(z^2-x^2)^{\lambda-1}+\lambda(z^2-x^2)^{\lambda-3}z^2x^2+\dots+\lambda(zx)^{\lambda-1},$$

porro est $z^{2\lambda}-x^{2\lambda}=y^{2\lambda}$, et casu primo, de quo agitur, $z^2-x^2=2^{2\lambda\nu}.p^{2\lambda}.q^{2\lambda}$, ergo $\frac{z^{2\lambda}-x^{2\lambda}}{z^2-x^2}$ est potestas $2\lambda^{ta}$, quae sit $y'^{2\lambda}$. Cum supra inventum sit casu primo numerum q per $2\lambda+1$ divisibilem esse debere, etiam z^2-x^2 hunc factorem contineat necesse est; itaque ex aequatione (18.), terminis per z^2-x^2 sive per $2\lambda+1$ divisibilibus omissis, habemus congruentiam:

$$19.\qquad y'^{2\lambda}\equiv\lambda(zx)^{\lambda-1}\qquad(\text{mod. } 2\lambda+1).$$

Denique ex aequationibus $z=p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}$ et $\pm x=p^{2\lambda}-2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}$ sequitur $\pm x\equiv1$ et $z\equiv1$ modulo $2\lambda+1$, unde $(zx)^{\lambda-1}\equiv1$ (mod. $2\lambda+1$); itaque congruentia 19. mutatur in

$$20.\qquad y'^{2\lambda}\equiv\lambda\qquad(\text{mod. } 2\lambda+1),$$

quae congruentia nullomodo locum habere potest. Solus igitur remanet casus tertius, atque habemus

Theorema 2. „Si praeter λ etiam $2\lambda+1$ est numerus primus, aequatio $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$ per numeros integros solvi nequit, nisi y, qui est numerus par, simul per λ et per $2\lambda+1$ divisibilis est, et numerorum x, y, z formae sunt: $x=\frac{v^{2\lambda}+w^{2\lambda}}{2}$, $y=\frac{v^{2\lambda}-w^{2\lambda}}{2}$, $z=p^{2\lambda}+2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda}$, $\pm x=p^{2\lambda}-2^{2\lambda\nu-2}\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda}$."

Consideramus etiam residua, quae aequationes (15.) dant modulo 8. Quum numerorum imparium p, q, v, w quadrata sive potestates pares unitati congrua sint modulo 8, ex aequationibus illis habemus congruentias: pro casu secundo: $1+\lambda\equiv2$ (mod. 8.), et pro quarto casu: $1+1\equiv2\lambda$ (mod. 8.), unde elucet casum secundum non posse locum habere nisi λ habeat formam $8n+1$, neque casum quartum nisi sit $\lambda=4n+1$. Generalius autem demonstrari potest.

Theorema 3. „Casus primus, secundus et quartus non possunt locum habere nisi λ habet formam $8n+1$, pro ceteris formis numeri λ, $8n+3$, $8n+5$ et $8n+7$ solus casus tertius locum habere potest."

Hoc theorema demonstratur ex aequatione identica

$$21.\quad \frac{z^\lambda\mp x^\lambda}{z\mp x}=(z\mp x)^{\lambda-1}\pm\lambda(z\mp x)^{\lambda-3}xz+\ldots+\lambda(\pm xz)^{\frac{\lambda-1}{2}}$$

est enim pro casibus I., II. et IV. $z^\lambda\mp x^\lambda=2^{2\lambda\nu-2}D^{2\lambda}$ et $z\mp x=2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}$, ergo

$$22.\quad \frac{z^\lambda\mp x^\lambda}{z\mp x}=E^{2\lambda}$$

inde, terminis per 8 divisibilibus omissis, aequatio (21.) mutatur in congruentiam

$$23.\quad E^{2\lambda}\equiv\lambda(\pm xz)^{\frac{\lambda-1}{2}}\pmod{8}$$

porro e formis numerorum $\mp x$ et z, ad (14.) notatis sequitur esse ubique $\pm xz\equiv 1 \pmod{8}$, itaque congruentia (23.) mutatur in

$$24.\quad 1\equiv\lambda\pmod{8}$$

quae congruentia continet theorema pronunciatum.

Revertimur ad aequationes (17.) quae in hanc formam redigi possunt:

$$25.\quad z^\lambda-C^{2\lambda}=2^{2\lambda\nu-2}.D^{2\lambda},\quad C^{2\lambda}\mp x^\lambda=2^{2\lambda\nu-2}D^{2\lambda}.$$

Casibus I., II., et IV. $z\mp x$ factorem λ non continet, pro iis igitur casibus neque $z^\lambda\mp x$, neque D factorem λ potest continere, itaque per theorema primum ex aequationibus (25.) sequuntur;

$$26.\quad z-C^2=2^{2\lambda\nu-2}r^{2\lambda}\quad C^2\mp x=2^{2\lambda\nu-2}s^{2\lambda},$$

ex iisque additis:

$$27.\quad z\mp x=2^{2\lambda\nu-2}(r^{2\lambda}+s^{2\lambda}),$$

et quia pro casibus I. II. et IV. est $z\mp x=2^{2\lambda\nu-2}q^{2\lambda}$, habemus

$$28.\quad r^{2\lambda}+s^{2\lambda}=2.q^{2\lambda}.$$

Pro casu tertio $z\mp x$ continet factorem $\lambda^{2\lambda\mu-1}$, ergo $z^\lambda\mp x^\lambda$ factorem habebit $\lambda^{2\lambda\mu}$, et D factorem λ^μ, inde per theorema primum ex aequationibus (25.) pro hoc tertio casu deducuntur

$$29.\quad z-C^2=2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.r^{2\lambda},\quad C^{2\lambda}\mp x=2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.s^{2\lambda},$$

quibus additis:

$$30.\quad z\mp x=2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.(r^{2\lambda}+s^{2\lambda})$$

et quia pro casu tertio invenimus $z\mp x=2^{2\lambda\nu-1}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.q^{2\lambda}$ est

$$31.\quad r^{2\lambda}+s^{2\lambda}=2.q^{2\lambda}.$$

Numeri r, s, et q aequationum (28.) et (31.) factores sunt numeri D, ideoque etiam numeri D, ideoque etiam numeri y, eaeque aequationes continent theorema insigne:

Theorema 4. „Si aequatio $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$ per numeros integros solvi potest, semper inveniri possunt numeri tres, r, s et q, numeri y, ejusmodi ut satisfaciant aequationi $r^{2\lambda}+s^{2\lambda}=2.q^{2\lambda}$."

De numeris r, s, et q pauca adjicienda esse videntur. Per numeros x, y et z determinantur hoc modo:

casu I., II. et IV.
$$32.\quad z-\left(\frac{z^\lambda \pm x^\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = 2^{2\lambda\nu-2}.r^{2\lambda},$$
$$33.\quad \left(\frac{z^\lambda \pm x^\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \mp x = 2^{2\lambda\nu-2}\, s^{2\lambda}$$
$$34.\quad z \mp x = 2^{2\lambda\nu-1}\, q^{2\lambda},$$

casu III.
$$35.\quad z-\left(\frac{z^\lambda \pm x^\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = 2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.r^{2\nu},$$
$$36.\quad \left(\frac{z^\lambda \pm x^\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \pm x = 2^{2\lambda\nu-2}.\lambda^{2\lambda\mu-1}.s^{2\lambda},$$
$$37.\quad z \mp x = 2^{2\lambda\nu-1}.\lambda^{2\lambda\mu-1}\, q^{2\lambda}$$

Fieri potest ut numeri r, s, et q, quos hae aequationes praebent, factores communes habeant, qui vero, cum omnium trium communes esse debeant, ex aequatione $r^{2\lambda}+s^{2\lambda}=2.q^{2\lambda}$ tolli poterunt. Praeterea contendo, iis factoribus communibus sublatis, numerorum r et s factores omnes formam $2\lambda n+1$ habere. Notum est enim formae $z^\lambda \mp x^\lambda$ factores omnes, qui non sunt factores ipsius $z\mp x$, hanc formam habere, unde sequitur omnes etiam factores ipsius D, qui non sint factores ipsius $z\mp x$, sive ipsius q, eandem formam habere. Quum vero numeri r et s factores sint numeri D, e quibus per hyp. factores cum q communes sublati sunt, sequitur omnes eorum factores formam $2\lambda n+1$ habere. Si certum aliquem factorem primum numeri r accipimus esse $2\lambda m+1$, ex aequatione $r^{2\lambda}+s^{2\lambda}=2q^{2\lambda}$ habemus congruentiam

$$38.\quad s^{2\lambda} \equiv 2.q^{2\lambda} \quad (\text{mod. } 2\lambda m+1)$$

unde

$$39.\quad s^{2\lambda m} \equiv 2^m.q^{2\lambda m} \quad (\text{mod. } 2\lambda m+1)$$

et quia per hyp. numerus $2\lambda m+1$ est primus, esse debet

$$s^{2\lambda m} \equiv 1 \quad \text{et} \quad q^{2\lambda m} \equiv 1 \quad \text{modulo } 2\lambda m+1$$

itaque

$$40.\quad 2^m \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2\lambda m+1)$$

huic igitur congruentiae omnes factores primi numeri r satisfacere debent, et apertum est hoc idem de factoribus primis numeri s valere.

Lignicii Oct. 1835.

11.

De integralibus definitis et seriebus infinitis.

(Auctore *E. E. Kummer*, Dr. phil.)

In commentatione hujus diarii, tom. XII. pag. 144, dedimus theorema, cujus ope series infinitae, quas aequationis Riccatianae integrale completum continet, per integralia definita exprimi potuerunt, ibique adnotavimus, plura etiam theoremata similia nos alio loco esse exhibituros. Quae theoremata nunc proferemus. Quum enim series infinitae et integralia definita formae sint simplicissimae et usitatissimae, quibus functiones transcendentes exprimi possunt, alterius formae transformatio in alteram magni momenti est habenda. Integralium definitorum transformatio in series, per evolutionem functionis integrandae, fere semper facile perficitur, sed multo difficilius est alterum problema, de serierum infinitarum transformatione in integralia definita. In hoc enim problemate solvendo deest methodus generalis, quae successum certum habeat, et paucis solum casibus artificia singularia, sive methodi nonnullae singulares, ad finem propositum perducunt. Nostra etiam theoremata methodos aliquas speciales continent, et certis solum serierum classibus applicari possunt, omnes autem originem trahunt ex fonte communi, et quodammodo exempla sunt methodi generalis, quam primum explicaturi sumus.

Quem ad finem in usum vocamus integrale definitum

$$\int_a^b U.f(u,k)\,du,$$

in quo U sit functio variabilis u, $f(u,k)$ functio quantitatum u et k, et k sit numerus integer, et faciamus hoc integrale satisfacere aequationi

$$1.\quad \int_a^b U.f(u,k)\,du = B_k\int_a^b U.f(u,0)\,du$$

in qua B_k est functio data numeri k. Porro accipiamus seriem infinitam:

$$2.\quad A_0 f(u,0)+A_1 f(u,1)+A_2 f(u,2)+\dots\text{ etc.} = \varphi(u)$$

cujus summa $\varphi(u)$ per functiones notas exprimi possit. Quibus positis erit:

$$\int_a^b U\varphi(u)\,du$$

$$= A_0\int_a^b Uf(u,0)\,du + A_1\int^b Uf(u,1)\,du + A_2\int_a^b Uf(u,2)\,du+\dots\text{ etc.}$$

et per formulam (1.)

$$\int_a^b U\varphi(u)\,du = \int_a^b U f(u,0)\,du\,[A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots \text{ etc.}]$$

sive

$$3.\quad A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots = \frac{\int_a^b U\varphi(u)\,du}{\int_a^b U f(u,0)\,du}.$$

Hac methodo si series aliqua per integralia definita exprimenda proponitur, factores certi A_0, A_1, A_2 etc. a terminis singulis sunt sejungendi, iique ita sunt accipiendi, ut seriei (2.) summa facili negotio possit inveniri; eo consilio etiam functio $f(u,k)$ apte eligenda est, postea superest ut functio U inveniatur, quae satisfaciat aequationi (1.). Generaliter igitur cujuslibet seriei summam per integralia definita exprimere possemus, dummodo functionis U determinatio idonea succederet. De hoc vero problemate, quod difficilioribus adnumerandum est, et methodos sibi singulares poscit, alio loco commentari nobis proposuimus, hic autem ex cognitis nonnullis integralibus, quae aequationi (1.) satisfaciunt, serierum infinitarum formas quasdam, per integralia definita expressas, inveniemus, et theoremata nonnulla methodi modo traditae auxilio deducemus.

Primum accipiamus integrale $\int_0^\infty e^{-u}.u^{\alpha+k-1}\,du$, quod Cl. *Gauss* designat $\Pi(\alpha+k-1)$, cujus nota est formula reductionis:

$$4.\quad \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha+k-1}\,du = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\,du,$$

quae comparata cum aequatione (1.) dat $U = e^{-u}u^{\alpha-1}$, $f(u,k) = u^k$, $B_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$, quibus valoribus substitutis in aequationibus (2.) et (3.), habemus

Theorema I. „Si cognita est summa seriei

$$5.\quad A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \dots = \varphi(u)$$

habetur

$$6.\quad A_0 + \alpha A_1 + \alpha(\alpha+1)A_2 + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)A_3 + \dots = \frac{\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\varphi(u)\,du}{\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\,du}$$

sive

$$7.\quad A_0 + \alpha A_1 + \alpha(\alpha+1)A_2 + \dots \text{ etc.} = \frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\varphi(u)\,du."$$

Hujus theorematis usum exemplis nonnullis explicabimus. Si ponitur $\varphi(u) = \cos(u.\operatorname{tang} x)$, est $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = -\frac{\operatorname{tang}^2 x}{1.2}$, $A_3 = 0$,

$A_4 = +\frac{\text{tang}^4 x}{1.2.3.4}$ etc. itaque per aequationem (7.)

$$1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\text{tang}^2 x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3.4}\text{tang}^4 x \ldots.$$
$$= \frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}\cos(u\,\text{tang}\,x)\,du,$$

hujus autem seriei summam notam $(\cos x)^\alpha \cos(\alpha x)$ substituentes habemus:

$$8. \quad \int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}\cos(u\,\text{tang}\,x)\,du = \Pi(\alpha-1)(\cos x)^\alpha \cos(\alpha x).$$

Simili modo, si sumitur $\varphi(u) = \sin(u\,\text{tang}\,x)$ unde $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{\text{tang}\,x}{1}$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{\text{tang}^3 x}{1.2.3}$ etc., est per aequationem (7.)

$$\frac{\alpha}{1}\text{tang}\,x - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\text{tang}^3 x + \ldots. = \frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}\sin(u\,\text{tang}\,x)\,du,$$

et quum hujus seriei summa nota sit $(\cos x)^\alpha \sin \alpha x$, sequitur:

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}\sin(u\,\text{tang}\,x)\,du = \Pi(\alpha-1)(\cos x)^\alpha \sin(\alpha x).$$

Integralia duo, (8.) et (9.), quae theorematis auxilio invenimus, jamdudum a geometris inventa sunt, et variis modis demonstrata, attamen haec demonstratio nostra eo videtur aliis praestare, quod quantitatum imaginariarum ope non eget, et pro quolibet valore positivo, integro vel fracto numeri α, aeque valet. Generaliter si quantitates A_0, A_1 etc. ita accipiuntur, ut non solum $\varphi(u)$, sed etiam seriei $A_0 + \alpha A_1 + \alpha(\alpha+1)A_2 + \ldots.$ summa per functiones notas exprimi possit, integralium definitorum valores inveniuntur. Ita si ponitur $\varphi(u) = \cos(2\sqrt{(xu)})$, est $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{-x}{\frac{1}{2}.1}$, $A_2 = \frac{x^2}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}$, etc. ideoque

$$10. \quad 1 - \frac{\alpha.x}{\frac{1}{2}.1} + \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2} - \ldots. = \frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}\cos(2\sqrt{(xu)})\,du$$

praeterea si ponitur $\alpha = \frac{1}{2}$, haec series transit in evolutionem ipsius e^{-x}, et fit $\Pi(\alpha-1) = \Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, itaque est

$$\int_0^\infty e^{-u}\, u^{-\frac{1}{2}}\cos(2\sqrt{(xu)})\,du = \sqrt{\pi}.e^{-x},$$

sive posito $u = v^2$ et $x = z^2$:

$$\int_0^\infty e^{-v^2}\cos(2zv)\,dv = \frac{\sqrt{\pi}.e^{-z^2}}{2}.$$

Aliud theorema deducemus ex integrali

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1} du = \alpha^{-\beta}\,\Pi(\beta-1),$$

quod hanc habet formulam reductionis:

$$11.\quad \int_0^1 u^{\alpha+k-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1} du = \frac{\alpha^\beta}{(\alpha+k)^\beta}\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1} du.$$

Per comparationem hujus formulae et aequationis (1.) habemus pro hoc casu $f(u,k)=u^k$, $U=u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}$, $B_k=\left(\frac{\alpha}{\alpha+k}\right)^\beta$, itaque ex aequationibus (2.) et (3.) sequitur

Theorema II. „Ex cognita summa seriei

$$13.\quad A_0+A_1u+A_2u^2+\dots = \Phi(u)$$

sequitur

$$14.\quad A_0+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\beta A_1+\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^\beta A_2+\dots = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}\Phi(u)\,du}{\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}du}$$

sive

$$15.\quad \frac{A_0}{\alpha^\beta}+\frac{A_1}{(\alpha+1)^\beta}+\frac{A_2}{(\alpha+2)^\beta}+\dots = \frac{1}{\Pi(\beta-1)}\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}\Phi(u)\,du.\text{"}$$

Exempli gratia accipiamus

$$\Phi(u) = \frac{x\cos\omega - x^2u}{1-2xu\cos\omega+x^2u^2} = x\cos\omega + x^2u\cos2\omega + x^3u^2\cos3\omega+\dots$$

unde fit $A_0=x\cos\omega$, $A_1=x^2\cos2\omega$, $A_2=x_3\cos3\omega$ etc., itaque per aequat. (15.)

$$16.\quad \frac{x\cos\omega}{\alpha^\beta}+\frac{x^2\cos2\omega}{(\alpha+1)^\beta}+\frac{x^3\cos3\omega}{(\alpha+2)^\beta}+\dots$$
$$= \frac{1}{\Pi(\beta-1)}\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}(x\cos\omega-x^2u)\,du}{1-2xu\cos\omega+x^2u^2}.$$

Idem integrale, cujus ope theorema II. inventum est, aliud nobis theorema praebebit per formulam

$$17.\quad \int_0^1 u^{\alpha+k-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta+k-1}du = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)\alpha^\beta}{(\alpha+k)^{\beta+k}}\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}du,$$

quae, cum aequatione (1.) comparata, dat:

$$f(u,k)=\left(ul\frac{1}{u}\right)^k,\quad U=u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1},\quad B_k=\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)\alpha^\beta}{(\alpha+k)^{\beta+k}}.$$

ex quibus substitutis in aequat. (2.) et (3.) sequitur:

Theorema III. „Per cognitam summam seriei:

$$18.\quad A_0+A_1ul\frac{1}{u}+A_2\left(ul\frac{1}{u}\right)^2+\dots = \Phi\left(ul\frac{1}{u}\right),$$

habetur hujus etiam seriei summa per integralia definita expressa:

$$19.\quad A_0+\frac{\beta.\alpha^\beta}{(\alpha+1)^{\beta+1}}A_1+\frac{\beta(\beta+1)\alpha^\beta}{(\alpha+2)^{\beta+2}}A_2+\ldots = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}\varphi\left(ul\frac{1}{u}\right)du}{\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}du}$$

sive

$$20.\quad \frac{A_0}{\alpha^\beta}+\frac{\beta.A_1}{(\alpha+1)^{\beta+1}}+\frac{\beta(\beta+1)A_2}{(\alpha+2)^{\beta+2}}+\ldots$$
$$=\frac{1}{\Pi\,\beta-1}\int_0^1 u^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{u}\right)^{\beta-1}\Phi\left(ul\frac{1}{u}\right)du.$$

Hoc theoremate uti possumus ad inveniendam summam seriei $1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}+\frac{x^3}{4^4}+\ldots$, nam si sumitur $\alpha=1$, $\beta=1$, et $\Phi\left(ul\frac{1}{u}\right)=e^{xul\frac{1}{u}}=u^{-ux}$, est $A_0=1$, $A_1=\frac{x}{1}$, $A_2=\frac{x^2}{1.2}$ etc., itaque per aequationem (20.)

$$21.\quad 1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}+\frac{x^3}{4^4}+\ldots=\int_0^1 u^{-ux}\,du.$$

Hic etiam illud theorema recipiemus, quod in hoc diario tom. XII. pag. 144 jam prosuimus, eoque ad integralia nonnulla invenienda utemur. Quem ad finem consideremus integrale

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}\,du,$$

quod hoc modo per functionem Π exprimitur,

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}.du = \frac{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}$$

et hanc habet formulam reductionis:

$$22.\quad \int_0^1 u^{\alpha+k-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}du=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-1)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}du.$$

Quae si comparatur cum formula (1.), est $f(u,k)=u^k$,

$$U=u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1},\qquad B_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k)-1)}$$

iisque substitutis in aequat. (2.) et (3.) habemus

Theorema IV. „Ex cognita summa seriei

$$23.\quad A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+\ldots=\Phi(u)$$

sequitur haec summa seriei

$$24.\quad A_0+\frac{\alpha}{\beta}A_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2+\ldots=\frac{\int_0^1 u^{\alpha+1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}\Phi(u)du}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}du}$$

sive

$$25.\quad A_0+\frac{\alpha}{\beta}A_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2+\ldots$$
$$=\frac{\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}\Phi(u)\,du."$$

Aequationi (25.) ponendo $u=\sin^2 v$ hanc formam dare possumus

$$26.\quad A_0+\frac{\alpha}{\beta}A_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2+\ldots.$$
$$=\frac{2\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2\alpha-1}(\cos v)^{2\beta-2\alpha-1}\varphi(\sin^2 v)\,dv.$$

Nunc si ponitur $\varphi(\sin^2 v)=\cos(2\beta v)$, ex evolutione nota

$$\cos(2\beta v)=1-\frac{\beta.\beta}{\frac{1}{2}.1}\sin^2 v+\frac{\beta(\beta+1)\beta(\beta-1)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}\sin^4 v-\ldots.$$

sequitur $A_0=1$, $A_1=-\frac{\beta.\beta}{\frac{1}{2}.1}$, $A_2=+\frac{\beta(\beta+1)\beta(\beta-1)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}$ etc. quibus substitutis in aequatione (26.), est

$$27.\quad 1-\frac{\alpha.\beta}{\frac{1}{2}.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta-1)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}-\ldots.$$
$$=\frac{2\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2\alpha-1}(\cos v)^{2\beta-2\alpha-1}\cos(2\beta v)\,dv,$$

hujus autem seriei summa per functionem Π assignari potest (vide *Gauss* disquisit. gen. c. seriem inf. etc. pag. 28)

$$1-\frac{\alpha.\beta}{\frac{1}{2}.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta-1)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}-\ldots.=\frac{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\alpha-\frac{1}{2})},$$

inde aequatio (27.) transit in hanc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2\alpha-1}(\cos v)^{2\beta-2\alpha-1}\cos(2\beta v)\,dv=\frac{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\alpha-\frac{1}{2})\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{2\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\alpha-\frac{1}{2})},$$

haec expressio per formulas fundamentales functionis Π non parum simplificatur, et formam simplicissimam obtinet, si mutatur α in $\frac{\alpha}{2}$, β in $\frac{\alpha+\beta}{2}$, quo facto prodit:

$$28.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\cos(\alpha+\beta)v\,dv=\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}.$$

Simili modo si in formula (26.) ponitur

$$\varphi(\sin^2 v)=\frac{\sin(2\beta-1)v}{(2\beta-1)\sin v}$$

invenietur integrale

$$29.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\sin(\alpha+\beta)v\,dv=\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}.$$

Sed facile etiam hoc integrale ex illo deducitur, nam si in illo v mutatur in $\frac{\pi}{2}-v$, α in β et β in α, prodit

$$\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta}\cos(\alpha+\beta)v\,dv$$

$$+\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\sin(\alpha+\beta)v\,dv=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}$$

ex quo per formulam (28.) sequitur

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\sin(\alpha+\beta)v\,dv$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\right)\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\,.\,\Pi(\alpha+\beta-1)},$$

quae formula cum aequatione (29.) identica est, quia

$$\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}}{\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Aliud integrale theorematis quarti ope invenitur, ponendo $\alpha=\frac{1}{2}$, $\Phi(\sin^2 v)=\cos(\gamma v)$, inde per evolutionem notam

$$\cos(\gamma v)=1-\frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1}\sin^2 v+\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}\sin^4 v-\dots$$

habemus

$$A_0=1,\quad A_1=-\frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1},\quad A_2=-\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2},\ \text{etc.}$$

quibus substitutis prodit

$$1-\frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}}{\beta\cdot 1}+\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\beta(\beta+1)\,1\cdot 2}-\dots$$

$$=\frac{2\Pi(\beta-1)}{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos v)^{2\beta-2}\cos(\gamma v)\,dv,$$

et quum hujus seriei summa per functionem Π exprimi possit hoc modo:

$$\frac{\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi\left(\beta+\frac{\gamma}{2}-1\right)\Pi\left(\beta-\frac{\gamma}{2}-1\right)}$$

est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos v)^{2\beta-2}\cos(\gamma v)\,dv=\frac{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-\frac{1}{2})}{2\Pi\left(\beta+\frac{\gamma}{2}-1\right)\Pi\left(\beta-\frac{\gamma}{2}-1\right)},$$

denique si β mutatur in $\frac{\beta+2}{2}$, et $\Pi\left(\frac{\beta}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)$ transformatur in

$\sqrt{\pi}.2^{-\beta}\Pi(\beta)$, hoc integrale accipit formam:

$$30.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos(\gamma v)\, da = \frac{\pi\Pi(\beta)}{2^{\beta+1}\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

Eadem methodo inveniri possunt integralia duo

$$\int_0^\pi (\sin v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv \quad \text{et} \quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv,$$

sed faciliori negotio deducuntur ex eo, quod modo invenimus, quod hunc ad finem ita repraesentari potest

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\Pi(\beta)}{2^\beta\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

et ex hoc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv = 0,$$

cujus veritas sponte elucet. Nam si illud ducitur in $\cos\frac{\gamma\pi}{2}$, hoc in $\sin\frac{\gamma\pi}{2}$, fit per additionem:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos\left(\gamma v - \frac{\gamma\pi}{2}\right) dv = \frac{\pi\cos\frac{\gamma\pi}{2}\Pi(\beta)}{2^\beta\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

si vero alterum ducitur in $\sin\frac{\gamma\pi}{2}$, alterum in $\cos\frac{\gamma\pi}{2}$, per subtractionem eorum fit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2} - \gamma v\right) dv = \frac{\pi\sin\frac{\gamma\pi}{2}\Pi(\beta)}{2^\beta\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

denique si v mutatur in $\frac{\pi}{2} - v$, habemus

$$31.\quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\Pi(\beta)}{2^\beta\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

$$32.\quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\sin\frac{\gamma\pi}{2}\Pi(\beta)}{2^\beta\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

Ex invento valore integralis (30.) sive aliis modis facile deducitur formula reductionis:

$$\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta}\cos(\alpha+\beta)v\,dv$$

$$+\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\sin(\alpha+\beta)v\,dv=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}$$

ex quo per formulam (28.) sequitur

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{\alpha-1}(\cos v)^{\beta-1}\sin(\alpha+\beta)v\,dv$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\right)\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}.\Pi(\alpha+\beta-1)},$$

quae formula cum aequatione (29.) identica est, quia

$$\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}}{\sin(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Aliud integrale theorematis quarti ope invenitur, ponendo $\alpha=\frac{1}{2}$, $\varPhi(\sin^2 v)=\cos(\gamma v)$, inde per evolutionem notam

$$\cos(\gamma v)=1-\frac{\frac{\gamma}{2}.\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}.1}\sin^2 v+\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}\sin^4 v-\dots$$

habemus

$$A_0=1,\quad A_1=-\frac{\frac{\gamma}{2}.\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}.1},\quad A_2=-\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2},\ \text{etc.}$$

quibus substitutis prodit

$$1-\frac{\frac{\gamma}{2}.\frac{\gamma}{2}}{\beta.1}+\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\beta(\beta+1)1.2}-\dots$$

$$=\frac{2\Pi(\beta-1)}{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos v)^{2\beta-2}\cos(\gamma v)\,dv,$$

et quum hujus seriei summa per functionem Π exprimi possit hoc modo:

$$\frac{\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi\left(\beta+\frac{\gamma}{2}-1\right)\Pi\left(\beta-\frac{\gamma}{2}-1\right)}$$

est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos v)^{2\beta-2}\cos(\gamma v)\,dv=\frac{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-\frac{1}{2})}{2\Pi\left(\beta+\frac{\gamma}{2}-1\right)\Pi\left(\beta-\frac{\gamma}{2}-1\right)},$$

denique si β mutatur in $\frac{\beta+2}{2}$, et $\Pi\left(\frac{\beta}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)$ transformatur in

$\sqrt{\pi}.2^{-\beta}\Pi(\beta)$, hoc integrale accipit formam:

$$30. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos(\gamma v)\, da = \frac{\pi\,\Pi(\beta)}{2^{\beta+1}\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

Eadem methodo inveniri possunt integralia duo

$$\int_0^\pi (\sin v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv \quad \text{et} \quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv,$$

sed faciliori negotio deducuntur ex eo, quod modo invenimus, quod hunc ad finem ita repraesentari potest

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\,\Pi(\beta)}{2^\beta\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

et ex hoc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv = 0,$$

cujus veritas sponte elucet. Nam si illud ducitur in $\cos\frac{\gamma\pi}{2}$, hoc in $\sin\frac{\gamma\pi}{2}$, fit per additionem:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \cos\left(\gamma v - \frac{\gamma\pi}{2}\right) dv = \frac{\pi\cos\frac{\gamma\pi}{2}\,\Pi(\beta)}{2^\beta\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

si vero alterum ducitur in $\sin\frac{\gamma\pi}{2}$, alterum in $\cos\frac{\gamma\pi}{2}$, per subtractionem eorum fit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos v)^\beta \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2} - \gamma v\right) dv = \frac{\pi\sin\frac{\gamma\pi}{2}\,\Pi(\beta)}{2^\beta\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

denique si v mutatur in $\frac{\pi}{2} - v$, habemus

$$31. \quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \cos(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\Pi(\beta)}{2^\beta\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

$$32. \quad \int_0^\pi (\sin v)^\beta \sin(\gamma v)\, dv = \frac{\pi\sin\frac{\gamma\pi}{2}\,\Pi(\beta)}{2^\beta\,\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

Ex invento valore integralis (30.) sive aliis modis facile deducitur formula reductionis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta+2k-1} \cos(\gamma u)\, du = B_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-1} \cos(\gamma u)\, du,$$

in qua B_k significat hanc expressionem:

$$B_k = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+2k-1)}{(\beta+\gamma+1)(\beta+\gamma+3)\ldots.(\beta+\gamma+2k-1)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+3)\ldots.(\beta-\gamma+2k-1)},$$

haec formula praebet theorema:

Theorema V. „Si ponitur

$$33.\quad A_0 + A_1 \cos^2 u + A_2 \cos^4 u + A_3 \cos^6 u + \ldots. = \varphi(\cos^2 u)$$

et

$$34.\quad R = A_0 + \frac{\beta(\beta+1)A_1}{(\beta+\gamma+1)(\beta-\gamma+1)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)A_2}{(\beta+\gamma+1)(\beta+\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)} + \ldots.$$

est

$$35.\quad R = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-1} \cos(\gamma u)\, \varphi(\cos^2 u)\, du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-1} \cos(\gamma u)\, du}$$

sive

$$36.\quad R = \frac{2^\beta \Pi\left(\frac{\beta+\gamma-1}{2}\right) \Pi\left(\frac{\beta-\gamma-1}{2}\right)}{\pi \Pi(\beta-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-1} \cos(\gamma u)\, \varphi(\cos^2 u)\, du."$$

Hujus theorematis exemplum simplex habemus ponendo $\beta = 1$, $\gamma = 2\alpha$, $\varphi(\cos^2 u) = \cos(2z\cos u)$ unde $A_0 = 1$, $A_1 = -\frac{2^2 z^2}{1.2}$, $A_2 = +\frac{2^4 z^4}{1.2.3.4}$ etc., quibus valoribus in aequatione (36.) substitutis est:

$$37.\quad 1 - \frac{z^2}{(1+\alpha)(1-\alpha)} + \frac{z^4}{(1+\alpha)(2+\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)} - \ldots. = \frac{2\alpha}{\sin \alpha\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\alpha u) \cos(2z \cos u)\, du.$$

Aliud theorema deducitur ex formula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^{\beta-\alpha-1} \cos(\beta+\alpha+2k-1)v\, dv = B_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^{\beta-\alpha-1} (\beta+\alpha-1)v\, dv,$$

ubi

$$B_k = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-1)},$$

quae per aequationem (30.) sive aliis modis facile demonstratur. Per comparationem hujus formulae cum aequatione (1.) videmus hoc casu statuendum esse

$$f(u,k) = \cos(\beta+\alpha+2k-1)u, \qquad U = (\cos u)^{\beta-\alpha-1},$$

qui valores in aequationibus (2.) et (3.) positi dant.

Theorema VI. „Si cognita est summa seriei

38. $A_0\cos(\alpha+\beta-1)u + A_1\cos(\alpha+\beta+1)u + A_2\cos(\alpha+\beta+3)u + \dots = \varphi(u)$

habetur etiam hujus seriei summa:

$$39. \quad A_0 - \frac{\alpha}{\beta}A_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2 - \dots = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-\alpha-1}\varphi(u)\,du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-\alpha-1}\cos(\beta+\alpha-1)u\,du}$$

sive

$$40. \quad A_0 - \frac{\alpha}{\beta}A_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2 - \dots = \frac{2^{\beta-1}\Pi(\beta-1)\Pi(-\alpha)}{\pi\,\Pi(\beta-\alpha-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-\alpha-1}\varphi(u)\,du."$$

Hoc theoremate si uti volumus ad inveniendam summam seriei $1 + \frac{x}{\beta.1} + \frac{x^2}{\beta(\beta+1)1.2} + \dots$, fieri debet $\alpha = \frac{1}{2}$ et $A_0 = 1$, $A_1 = -\frac{x}{\frac{1}{2}.1}$, $A_2 = +\frac{x^2}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}$ etc., itaque invenienda est summa seriei

$$\varphi(u) = \cos(\beta-\tfrac{1}{2})u - \frac{x\cos(\beta+\frac{3}{2})u}{\frac{1}{2}.1} + \frac{x^2\cos(\beta+\frac{7}{2})u}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2} - \dots$$

quae per methodos notas derivatur ex hoc

$$\cos(2\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{\frac{1}{2}.1} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2} - \dots$$

scilicet

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}e^{2\sqrt{x}\sin u}\cos((\beta-\tfrac{1}{2})u - 2\sqrt{x}\cos u) + \tfrac{1}{2}e^{-2\sqrt{x}\sin u}\cos((\beta-\tfrac{1}{2})u + 2\sqrt{x}\cos u),$$

quibus in aequat. (40.) substitutis habemus

$$1 + \frac{x}{\beta.1} + \frac{x^2}{\beta(\beta+1)1.2} + \dots = \frac{2^{\beta-\frac{1}{2}}\Pi(\beta-1)}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\beta-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-\frac{1}{2}}\varphi(u)\,du.$$

Functio $\varphi(u)$ duabus partibus constat, quae inter se non nisi signis oppositis quantitatis $\sqrt{x}$ differunt et facile patet, si utramque partem seorsim integramus et in altera ponimus $-v$. loco v, haec duo integralia non nisi limitibus differre, qui pro altero sunt $-\frac{\pi}{2}$ et 0, pro altero 0 et $+\frac{\pi}{2}$. Iis igitur integralibus in unum conjunctis habemus

$$41. \quad 1 + \frac{x}{\beta.1} + \frac{x^2}{\beta(\beta+1)1.2} + \dots$$

$$= \frac{2^{\beta-\frac{3}{2}}\Pi(\beta-1)}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\beta-\frac{1}{2})}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{\beta-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{x}\sin u}\cos((\beta-\tfrac{1}{2})u - 2\sqrt{x}\cos u)\,du.$$

Revertamur ad integrale supra inventum aequat. (11.)

$$\int_0^\infty e^{-v^2}\cos(2zv)\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-z^2}$$

quod posito $z = a\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}$ transformatur in

$$\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\left(2av\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}q^{a^2},$$

inde, si ponitur $a+k$ loco a, deducitur haec formula

$$42.\quad \int_0^\infty e^{-v^2}\cos\left(2(a+k)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)dv$$
$$= q^{k^2+2ak}\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\left(2av\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)dv.$$

Haec formula novum nobis theorema notatu dignissimum praebebit. Nam per comparationem cum aequatione (1.) habemus $f(u,k) = \cos\left(2(a+k)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)$, $U = e^{-v^2}$, $B_k = q^{k^2+2ak}$ itaque ex aequationibus (2.) et (3.) sequitur.

Theorema VII. „Si cognita est summa seriei

$$43.\quad A_0\cos\left(2av\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + A_1\cos\left(2(a+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)$$
$$+ A_2\cos\left(2(a+2)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + \dots = \varphi(v)$$

habetur etiam hujus seriei summa

$$44.\quad A_0 + A_1q^{1+2a} + A_2q^{4+4a} + A_3q^{9+6a} + \dots = \frac{\int_0^\infty e^{-v^2}\varphi(v)\,dv}{\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\left(2va\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)dv}$$

sive

$$45.\quad A_0 + A_1q^{1+2a} + A_2q^{4+4a} + A_3q^{9+6a} + \dots = \frac{2q^{-a^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-v^2}\varphi(v)\,dv."$$

Hujus theorematis auxilio inveniri possunt summae serierum, secundum eas potestates quantitatis q dispositarum, quarum exponentes in serie arithmetica *secundi* ordinis progrediantur. Ejusmodi series aliquae persimplices in theoria functionum ellipticarum reperiuntur, ad quas prae ceteris methodum nostram applicabimus. Quem ad finem accipiamus

$$\varphi(v) = \cos\left(2\beta v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + x\cos\left(2(\beta-1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)$$
$$+ x^2\cos\left(2(\beta-2)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + \dots$$

cujus seriei summa est

$$\varphi v = \frac{\cos\left(2\beta v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) - x\cos\left(2(\beta+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)}{1 - 2x\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + x^2}$$

unde est $A_0 = 1$, $A_1 = x$, $A_2 = x^2$ etc., $\alpha = -\beta$, iis valoribus in aequatione (45.) substitutis habemus

$$46.\quad 1 + xq^{1-2\beta} + x^2 q^{4-4\beta} + x^3 q^{9-6\beta} + \dots$$

$$= \frac{2q^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[\cos\left(2\beta v \sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) - x\cos\left(2(\beta+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1 - 2x\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + x^2} dv$$

et, si ponitur $x = zq^{2\beta}$,

$$47.\quad 1 + zq + z^2 q^4 + z^3 q^9 + z^4 q^{16} + \dots$$

$$= \frac{2q^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[\cos\left(2\beta v \sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) - zq^{2\beta}\cos\left(2(\beta+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1 - 2zq^{2\beta}\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + z^2 q^{4\beta}} dv.$$

Quantitas β, que in altera aequationis parte non inest, ex arbitrio potest eligi, attamen monendum est, eam ita accipiendam esse, ut $x = zq^{2\beta}$ sit unitate minor, ne $\Phi(v)$ sit series divergens. Integrale formam simplicissimam obtineret posito $\beta = 0$; tum vero in hac formula quantitati z valorem $z = 1$ tribuere non liceret. Qua de causa accipiamus $\beta = \frac{1}{2}$, et ponamus praeterea $z = +1$ et $z = -1$; unde obtinemus has series

$$48.\quad 1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{q}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[\cos\left(v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) - q\cos\left(3v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1 - 2q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + q^2} dv,$$

$$49.\quad 1 - q + q^4 - q^9 + q^{16} - \dots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{q}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[\cos\left(v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + q\cos\left(3v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1 + 2q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + q^2} dv.$$

Easdem series duas invenit Cl. *Jacobi* (Fund. nova theor. f. ell. p. 184)

$$1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)},$$

$$1 - q + q^4 - q^9 + q^{16} - \dots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)},$$

ubi quantitates q, K, et k' ita a variabili k pendent, ut sit

$$k' = \sqrt{(1-k^2}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}},$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Simili modo in theoremate VII. accipiamus

$$\varphi(v) = \cos\left(2(\beta-1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) + x\cos\left(2(\beta-3)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)$$
$$+x^2\cos\left(2(\beta-5)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+\dots$$

unde sequitur $\alpha=-\beta$ et $A_0=0$, $A_1=1$, $A_2=0$, $A_3=x$, $A_4=0$, $A_5=x^2$ etc. Seriei $\varphi(v)$ summa facillime invenitur

$$\varphi(v) = \frac{\cos\left(2(\beta-1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right) - x\cos\left(2(\beta+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)}{1-2x\cos\left(4v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+x^2},$$

inde per aequationem (45.) habemus

$$50.\quad q^{1-2\beta}+xq^{9-6\beta}+x^2q^{25-10\beta}+x^3q^{49-14\beta}+\dots$$
$$=\frac{2q^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[\cos\left(2(\beta-1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)-x\cos\left(2(\beta+1)v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1-2x\cos\left(4v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+x^2}dv,$$

ponendo $x=zq^{4\beta}$ et $\beta=1$, et multiplicando per q^2, fit

$$51.\quad q+zq^9+z^2q^{25}+z^3q^{49}+\dots$$
$$=\frac{2q}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[1-zq^4\cos\left(4v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1-2zq^4\cos\left(4v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+z^2q^8}dv,$$

si q mutatur in $\sqrt[4]{q}$, haec formula transit in hanc

$$52.\quad \sqrt[4]{q}+z\sqrt[4]{q^9}+z^2\sqrt[4]{q^{25}}+z^3\sqrt[4]{q^{49}}+\dots$$
$$=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[1-zq\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1-2zq\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+z^2q^2}dv,$$

denique ponendo $z=1$ et $z=-1$ habemus series duas

$$53.\quad \sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\sqrt[4]{q^{49}}+\dots$$
$$=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[1-q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1-2q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+q^2}dv,$$

$$54.\quad \sqrt[4]{q}-\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}-\sqrt[4]{q^{49}}+\dots$$
$$=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}\left[1+q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)\right]}{1+2q\cos\left(2v\sqrt{\left(l\frac{1}{q}\right)}\right)+q^2}dv,$$

quarum alteram Cl. *Jacobi* invenit l. c.

$$\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\sqrt[4]{q^{49}}+\ldots = \sqrt{\left(\frac{kK}{2\pi}\right)}.$$

Eadem methodo inveniri possunt summae serierum generaliorum

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1-2q\cos x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}.\sin x-2\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x-\ldots,$$

quae in theoria functionum ellipticarum plurimum valent, quarum vero expressiones per integralia definita, quum minus simplices evadant, hoc loco ommittimus.

Ex integrali cognito

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{l(u)}du = l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

sponte prodit.

Theorema VIII. „Si ponitur

$$56.\quad A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+\ldots = \varphi(u)$$

est

$$57.\quad A_0 l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+A_1 l\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)+A_2 l\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)+\ldots = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{l(u)}\varphi(u)\,du.\text{"}$$

Cujus theorematis exemplum notatu dignum obtinemus ponendo

$$\varphi(u) = 1-u+u^2-u^3+\ldots+u^{2n} = \frac{1+u^{2n+1}}{1+u},$$

unde fit:

$$58.\quad l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-l\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)+l\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)-\ldots+l\left(\frac{\alpha+2n}{\beta+2n}\right) = \int_0^1 \frac{(u^{\alpha-1}-u^{\beta-1})(1+u^{2n+1})}{(1+u)\,l(u)}du,$$

haec summa logarithmorum colligitur in unum logarithmum hujus producti

$$\frac{\alpha(\alpha+2)\ldots(\alpha+2n)(\beta+1)(\beta+3)\ldots(\beta+2n-1)}{\beta(\beta+2)\ldots(\beta+2n)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2n-1)}$$

et, si auctore Cl. *Gauss* ponimus

$$\Pi(k,z) = \frac{1.2.3\ldots k.k^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}$$

hoc productum ita repraesentari potest:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}.\frac{\Pi\left(n+1,\frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(n,\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Pi\left(n+1,\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(n,\frac{\beta-1}{2}\right)},$$

itaque est

$$59.\quad \int_0^1 \frac{(u^{\alpha-1}-u^{\beta-1})(1+u^{2n+1})}{(1+u)\,l(u)}du = l\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\frac{\Pi\left(n+1,\frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(n,\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Pi\left(n+1,\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(n,\frac{\beta-1}{2}\right)}\right\},$$

si numerus n ponitur infinite magnus, u^{2n+1} sub integrationis signo evanescit et $\Pi(n, z)$ transit in $\Pi(z)$ unde fit:

$$60.\quad \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{(1+u)\,l(u)}\,du = l\left(\frac{\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}\right).$$

Ex hoc integrali, quod novum esse putamus, sequitur etiam casus specialis

$$61.\quad \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{-\alpha}}{(1+u)\,l(u)}\,du = l\left(\tang\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Alia etiam theoremata permulta ex aliis integralium definitorum valoribus et reductionibus cognitis, secundum methodum generalem supra traditam, deduci possunt, quae vero omnia colligere longum esset. Imo ea, quae hic dedimus, tanquam exempla methodi generalis sufficiant. Hic autem theorema alius generis addere placet, quod quodammodo cum illis conjunctum est, eorumque auxilio demonstratur.

Theorema IX. „Si functio quaedam patitur hanc formam evolutionis

$$62.\quad \varphi(\cos^2 u) = A_0 + A_1\cos^2 u + A_2\cos^4 u + A_3\cos^6 u + \dots$$

et eadem functio evolvitur in seriem hujus formae:

$$63.\quad \varphi(\cos^2 u) = B_0 + \frac{B_1\cos u}{2\cos u} + \frac{B_2\cos 2u}{(2\cos u)^2} + \frac{B_3\cos 3u}{(2\cos u)^3} + \dots,$$

coefficientes B_0, B_1, B_2, etc. ita per integralia definita determinantur, ut sit generaliter

$$64.\quad B_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{k-1}\cos(k+1)u\,\varphi(\cos^2 u)\,du.\text{"}$$

Cujus theorematis demonstratio innititur formulae

$$65.\quad (\cos u)^{2k} = \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2.4.6\dots 2k}\left(1 + \frac{2k}{k+1}\cdot\frac{\cos u}{2\cos u} + \frac{2k(2k+1)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{\cos 2u}{(2\cos u)^2} + \dots\right),$$

quae ex formula generaliori, quam proposui in hoc diario (tom. XV. p. 161. form. 13.) facile deducitur. Nam si in aequatione

$$\varphi(\cos^2 u) = A_0 + A_1\cos^2 u + A_2\cos^4 u + \dots$$

loco potestatum cosinus substituuntur earum expressiones, quas aequatio (65.) praebet, est

65. $$\begin{aligned}\varphi(\cos^2 u) = A_0 &+ \tfrac{1}{2}A_1\left(1+\tfrac{2}{2}\cdot\tfrac{\cos u}{2\cos u}+\tfrac{2.3}{2.3}\cdot\tfrac{\cos 2u}{(2\cos u)^2}+\tfrac{2.3.4}{2.3.4}\cdot\tfrac{\cos 3u}{(2\cos u)^3}+\dots\right)\\ &+\tfrac{1.3}{2.4}A_2\left(1+\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{\cos u}{2\cos u}+\tfrac{4.5}{3.4}\cdot\tfrac{\cos 2u}{(2\cos u)^2}+\tfrac{4.5.6}{3.4.5}\cdot\tfrac{\cos 3u}{(2\cos u)^3}+\dots\right)\\ &+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}A_3\left(1+\tfrac{6}{4}\cdot\tfrac{\cos u}{2\cos u}+\tfrac{6.7}{4.5}\cdot\tfrac{\cos 2u}{(2\cos u)^2}+\tfrac{6.7.8}{4.5.6}\cdot\tfrac{\cos 3u}{(2\cos u)^3}+\dots\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

quae evolutio comparata cum hac:

$$\varphi(\cos^2 u) = B_0 + B_1\frac{\cos u}{2\cos u} + B_2\frac{\cos 2u}{(2\cos u)^2} + B_3\frac{\cos 3u}{(2\cos u)^3} +$$

dat

66. $$B_0 = A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1.3}{2.4}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}A_3 + \dots,$$

67. $$B_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1.3.4}{2.4.3}A_2 + \frac{1.3.5.6}{2.4.6.4}A_3 + \dots,$$

68. $$B_2 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{4.5}{3.4}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{6.7}{4.5}A_3 + \dots,$$

et facile intelligitur esse generaliter

69. $$B_h = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{h+3}{3}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(h+4)(h+5)}{4.5}A_3 + \dots,$$

cujus seriei terminus generalis est:

$$\frac{1.3.5\dots(2p-1).(h+p+1)(h+p+2)\dots(h+2p-1)}{2.4.6\dots 2p.(p+1)(p+2)\dots(2p+1)},$$

qui facile transformatur in hanc formam simpliorem

$$\frac{(h+p+1)(h+p+2)\dots(h+2p-1)}{2^{2p-1}.2.3\dots(p-1)}A_p,$$

quare series B_h hanc formam induit:

70. $$B_h = \frac{A_1}{2} + \frac{h+3}{2^3.1}A_2 + \frac{(h+4)(h+5)}{2^5.1.2}A_3 + \dots$$

Hujus seriei summa per theorema V. deducitur ex hac

$$\psi(\cos^2 u) = A_1 + A_2\cos^2 u + A_3\cos^4 u + .$$

nam si in aequationibus hujus theorematis V. ponitur $\beta = h+2$, $\gamma = h+1$, A_0 in A_1, A_1 in A_2, A_2 in A_3 etc., et $\varphi(\cos^2 u)$ in $\psi(\cos^2 u)$ prodit.

$$A_1 + \frac{h+3}{2^2.1}A_2 + \frac{(h+4)(h+5)}{2^4.1.2}A_3 + \dots = \frac{2^{h+2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^{h+1}\cos(h+1)u\,\psi(\cos u)\,du,$$

itaque est

$$B_h = \frac{2^{h+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^{h+1}\cos(h+1)u\,\psi(\cos^2 u)\,du,$$

quum autem sit $\psi(\cos^2 u) = \frac{\varphi(\cos^2 u) - A_0}{\cos^2 u}$, est

$$B_h = \frac{2^{h+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u\, \varphi(\cos^2 u)\, du$$
$$- \frac{A_0 2^{h+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u\, du,$$

et quia pro quovis valore positivo numeri h est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u\, du = 0$$

fit

$$71. \quad B_h = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u\, \varphi(\cos^2 u)\, du.$$

Ab hac coefficientium determinatione excipiendus esse videtur casus quo $h = 0$, namque series B_0 eo discrepat a ceteris, quod terminum A_0 continet, facile autem per theorema IV. sive V. invenitur hanc seriem exprimi per integrale

$$B_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u)\, du$$

unde eluoet primum coefficientem sequi eandem legem ac ceteros.

Notatu digna est relatio quae inter coefficientes harum serierum locum habet

$$72. \quad \varphi(\cos^2 u) = B_0 + B_1 \frac{\cos u}{2\cos u} + B_2 \frac{\cos 2u}{(2\cos u)^2} + B_3 \frac{\cos 3u}{(2\cos u)^3} + \dots.$$

et

$$73. \quad \varphi(\cos^2 u) = C_0 + C_1 \cos 2u + C_2 \cos 4u + C_3 \cos 6u + \dots,$$

nam si in aequatione (71.) loco $\varphi(\cos^2 u)$ haec series substituitur, fit

$$74. \quad B_h = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u\, (C_0 + C_1 \cos 2u + C_2 \cos 4u + \dots)\, du,$$

ubi integrandi sunt termini singuli hujus formae

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{h-1} \cos(h+1)u \cos(2ku)\, du,$$

quod integrale dividitur in haec duo

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{h-1} \cos(h+2k+1)u\, du + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos u)^{h-1} \cos(h-2k+1)u\, du,$$

quae secundum formulam (30.) hoc modo per functionem Π exprimuntur:

$$\frac{\Pi(h-1)}{\Pi(h+k)\,\Pi(-k-1)} + \frac{\Pi(h-1)}{\Pi(h-k)\,\Pi(k-1)}$$

prior pars semper evanescit, quia $\Pi(-k-1)=\infty$, pro quolibet numero integro positivo k, altera pars evanescit si $h-k$ est numerus positivus, sive si $k>h$, si vero $k \leqq h$ abit in

$$\frac{(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots(k-1)},$$

itaque est

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos u)^{h-1}\cos(h+1)u\cos(2ku)\,du = \frac{(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)},$$

inde aequatio (74.) transit in hanc

$$75. \quad B_h = C_1 + \frac{h-1}{1}C_2 + \frac{(h-1)(h-2)}{1.2}C_3 + \ldots + C_h$$

praeterea, quia terminus primus seriei (73.) exprimitur per integrale

$$C_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\cos^2 u)\,du$$

sequitur

$$B_0 = C_0,$$

itaque coefficientes evolutionis (72.) facillime ex coefficientibus seriei (73.) inveniri possunt.

Lignicii, m. Majo, a. 1836.

12.

De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis.

(Auctore *E. E. Kummer*, Dr. phil.)

Integralia definita, quae nunc tractare mihi proposui, arctissime conjuncta sunt cum seriebus infinitis, de quibus egi in commentatione hujus diarii de serie hypergeometrica, Tom. XV. pag. 138 sq. quas, ut faciliori modo repraesentari possint, his signis functionalibus designabo:

$$1.\quad 1+\frac{\alpha.x}{\beta.1}+\frac{\alpha(\alpha+1).x^2}{\beta(\beta+1).1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).x^3}{\beta(\beta+1)(\beta+2).1.2.3}+\dots=\varphi(\alpha,\beta,x),$$

$$2.\quad 1+\frac{x}{\alpha.1}+\frac{x^2}{\alpha(\alpha+1).1.2}+\frac{x^3}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).1.2.3}+\dots=\psi(\alpha,x),$$

$$3.\quad 1-\frac{\alpha.\beta}{1.x}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.x^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.x^3}+\dots=\chi(\alpha,\beta,x).$$

Inde earum serierum transformationes loco citato inventae hoc modo exhiberi possunt:

$$4.\quad \varphi(\alpha,\beta,x)=e^x.\varphi(\beta-\alpha,\beta,-x),$$

$$5.\quad \psi(\alpha,x)=e^{\pm2\sqrt{x}}\varphi(\alpha-\tfrac{1}{2},2\alpha-1,\pm4\sqrt{x}),$$

quae formula eadem est ac

$$6.\quad \varphi(\alpha,2\alpha,x)=e^{\frac{x}{2}}\psi\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{x^2}{16}\right)$$

et

$$7.\quad \chi(\alpha,\beta,x)=\frac{x^\alpha\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}\varphi(\alpha,\alpha-\beta+1,x)+\frac{x^\beta\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}\varphi(\beta,\beta-\alpha+1,x).$$

Quibus praeparatis primum quaestionem instituam de integrali

$$8.\quad y=\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du,$$

ex quo sequitur

$$\frac{dy}{dx}=-\int_0^\infty u^{\alpha-2}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^\infty u^{\alpha-3}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du,$$

per differentiationem quantitatis $u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{u}{x}}$ est:

$$d\left(u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}\right)$$

$$=-u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du+(\alpha-1)u^{\alpha-2}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du+x.u^{\alpha-3}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du,$$

et per integrationem intra limites 0 et ∞

$$0 = -\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{1x}{u}}du + (\alpha-1)\int_0^\infty u^{\alpha-2}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du$$
$$+ x\int_0^\infty u^{\alpha-3}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du,$$

sive quod idem est

$$9.\quad 0 = y + (\alpha-1)\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2},$$

Aequationis hujus integrale completum per series, quas signo functionali ψ designavimus, facile invenitur

$$10.\quad y = A.\psi(1-\alpha, x) + B.x^\alpha.\psi(1+\alpha, x),$$

ubi A et B sunt constantes arbitrariae. Inde sequitur integralis propositi expressio haec

$$\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du = A.\psi(1-\alpha, x) + B.x^\alpha.\psi(1+\alpha, x).$$

Constantis A determinatio facilis est; nam si quantitatem α positivam accipimus, et ponimus $x = 0$, habemus

$$\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}\,du = A$$

sive

$$A = \Pi(\alpha-1).$$

Ut eodemmodo constans B determinari possit, integrale y per substitutionem $u = \frac{x}{v}$ transformari debet, unde fit

$$\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du = x^\alpha\int_0^\infty v^{-\alpha-1}.e^{-v}.e^{-\frac{x}{v}}dv,$$

hac integralis transformatione adhibita aequatio (11.) transit in hanc:

$$\int_0^\infty v^{-\alpha-1}.e^{-v}.e^{-\frac{x}{v}}dv = A.x^{-\alpha}\psi(1-\alpha, x) + B.\psi(1+\alpha, x),$$

inde, si quantitatem α negativam accipimus et ponimus $x = 0$, habemus

$$\int_0^\infty v^{-\alpha-1}e^{-v}\,dv = B$$

sive

$$B = \Pi(-\alpha-1),$$

quibus denique constantium valoribus substitutis est:

$$12.\quad \int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}du = \Pi(\alpha-1)\psi(1-\alpha, x) + \Pi(-\alpha-1)x^\alpha\psi(1+\alpha, x).$$

Ab hac constantium determinatione dubia quaedam removenda sunt, quae inde oriri possint, quod constans altera inventa est posito $\alpha > 0$, alterius vero constantis determinatio hypothesin contrariam poscit. Attamen ap-

paret eas conditiones superfluas fuisse, si in constantibus determinandis non valore $x = 0$, sed aliis quibuscunque valoribus positivis usi essemus, neque alios inde constantium valores exstitisse. Praeterea monendum est formulam (12.) non valere nisi x sit quantitas positiva, alioqui integrale illud infinitum evaderet; si vero x est positivum hoc integrale valorem finitum habet, quaecunque sit quantitas α, positiva seu negativa.

Ex hac formula (12.) aliud integrale deduci potest, quod per series duas formae $\Phi(\alpha, \beta, x)$ exprimitur. Ponendo xv loco x, multiplicando per $e^{-v}.v^{\beta-1}.dv$ et integrando intra limites 0 et ∞, est

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.v^{\beta-1}.e^{-v}.e^{-\frac{xv}{u}}\,du\,dv = \Pi(\alpha-1)\int_0^\infty v^{\beta-1}.e^{-v}.\psi(1-\alpha,xv)\,dv$$
$$+\Pi(-\alpha-1)x^\alpha\int_0^\infty v^{\alpha+\beta-1}.e^{-v}\psi(1+\alpha,xv)\,dv,$$

integrationes secundum variabilem v facile peraguntur; est enim

$$\int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}\psi(1-\alpha,xv)\,dv = \Pi(\beta-1)\Phi(\beta,1-\alpha,x),$$
$$\int_0^\infty v^{\alpha+\beta-1}.e^{-v}\psi(1+\alpha,xv)\,dv = \Pi(\alpha+\beta-1)\Phi(\alpha+\beta,1+\alpha,x),$$
$$\int_0^\infty v^{\beta-1}.e^{-u}.e^{-\frac{xv}{u}}\,dv = \frac{\Pi(\beta-1)}{\left(1+\frac{x}{u}\right)^\beta}$$

unde

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.v^{\beta-1}.e^{-v}.e^{-\frac{xv}{u}}\,du\,dv = \Pi(\beta-1)\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\left(1+\frac{x}{u}\right)^\beta},$$

quod integrale ponendo ux loco u mutatur in

$$\Pi(\beta-1)\,x^\alpha\int_0^\infty \frac{u^{\alpha+\beta-1}.e^{-ux}\,du}{(1+u)^\beta},$$

quibus denique substitutis habemus

$$\Pi(\beta-1)\,x^\alpha\int_0^\infty \frac{u^{\alpha+\beta-1}.e^{-ux}\,du}{(1+u)^\beta}$$
$$=\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Phi(\beta,1-\alpha,x)+\Pi(-\alpha-1)\Pi(\alpha+\beta-1)x^\alpha\Phi(\alpha+\beta,1+\alpha,x),$$

quae formula, mutando α in $\alpha-\beta$, in hanc formam commodiorem redigitur

$$13.\quad \frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}.e^{-ux}.du}{(1+u)^\beta}$$
$$= \frac{\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}x^\beta.\Phi(\beta,\beta-\alpha+1,x)+\frac{\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}x^\alpha.\Phi(\alpha,\alpha-\beta+1,x).$$

Quia aequationis hujus altera pars, quantitatibus α et β inter se permutatis, eadem manet, esse debet

$$14. \quad \frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}.e^{-ux}.du}{(1+u)^\beta} = \frac{x^\beta}{\Pi(\beta-1)}\int_0^\infty \frac{u^{\beta-1}.e^{-ux}du}{(1+u)^\alpha}.$$

Si ad formulam (13.) transformatio applicatur, quam aequatio (7.) continet, est

$$15. \quad \frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}.e^{-ux}.du}{(1+u)^\beta} = \chi(\alpha,\beta,x).$$

Quum series $\chi(\alpha,\beta,x)$ ad classem serierum semiconvergentium pertineat, necessarium videtur formulam (15.) demonstratione singulari munire, e qua simul prodeat, per computationem numeri certi terminorum primorum hujus seriei valorem proximum integralis hujus inveniri. Quem ad finem adhibeo aequationem cognitam

$$1-\frac{\beta}{1}z+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}z^2-\ldots.(-1)^{k-1}\frac{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-2)}{1.2\ldots.(k-1)}z^{k-1}$$
$$=\frac{1}{(1+z)^\beta}-\frac{(-1)^k\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-1)}{1.2.3\ldots.k}z^k\int_0^1\frac{(1-u)^{k-1}du}{(1+zu)^{\beta+k}},$$

ponendo $z=\frac{v}{x}$, multiplicando per $v^{\alpha-1}.e^{-v}.dv$ tum integrando ab $v=0$ usque ad $v=\infty$ et dividendo par $\Pi(\alpha-1)$ fit

$$16. \quad 1-\frac{\alpha.\beta}{1.x}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.x^2}-\ldots.(-1)^{k-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+k-2)\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-2)}{1.2.3\ldots.(k-1).x^{k-1}}$$
$$=\frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}.e^{-v}.dv}{\left(1+\frac{v}{x}\right)^\beta}-\frac{(-1)^k\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-1)}{\Pi(\alpha-1)1.2.3\ldots.(k-1)x^k}\int_0^1\int_0^\infty\frac{(1-u)^{k-1}.v^{\alpha+k-1}.e^{-v}.dv.du}{\left(1+\frac{uv}{x}\right)^{\beta+k}},$$

hoc integrale duplex cum coefficiente suo errorem indicat, qui committitur si integrale

$$\frac{1}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}.e^{-v}.dv}{\left(1+\frac{v}{x}\right)^\beta}, \text{ sive quod idem est, } \frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}.e^{-vx}.dv}{(1+v)^\beta}$$

per seriei illius terminos primos, quorum numerus est k, computatur. Si k tam magnum est ut $\beta+k$ sit positivum illa quantitas, quam erroris nomine designavimus, signum mutat simulac k transit in $k+1$, sive, si seriei illius terminorum certus numerus computatur, haec summa aut major est aut minor quam integrale quaesitum, si vero terminus subsequens seriei adjicitur, haec nova summa est minor quam integrale quaesitum, si illa major erat, et major est si illa minor erat. Itaque summae, quas series illa praebet alternatim sunt nimis magnae et nimis parvae, atque elucet valorem proximum inveri, si computatio usque ad terminos minimos seriei semiconvergentis extendatur. Eadem res ex aequatione (16.) hoc modo demonstrari potest. Manifesto pro positivo $\beta+k$ est:

$$\int_0^1\int_0^\infty \frac{(1-u)^{k-1}.v^{\alpha+k-1}.e^{-v}\,dv\,du}{\left(1+\frac{uv}{x}\right)^{\beta+k}} < \int_0^1\int_0^\infty (1-u)^{k-1}.v^{\alpha+k-1}.e^{-v}.dv\,du$$

et

$$\int_0^1\int_0^\infty (1-u)^{k-1}.e^{-v}.v^{\alpha+k-1}\,dv\,du = \frac{\Pi(\alpha+k-1)}{k},$$

ergo error, qui per integrale illud duplex exprimitur, semper minor est quam

$$\frac{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+k-1)\,\Pi(\alpha+k-1)}{1.2.3\ldots.k.\Pi(\alpha-1)\,x^k},$$

qui cum sit terminus primus neglectus, sequitur errorem semper minorem esse quam eum terminum seriei, usque ad quem summatio extendatur.

Posito $\beta=1-\alpha$ aequatio (15.) transit in hanc:

$$\frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty (u+u^2)^{\alpha-1}.e^{-ux}.du$$

$$=\frac{\Pi(2\alpha-2)}{\Pi(\alpha-1)}x^{1-\alpha}.e^{\frac{x}{2}}.\varphi(1-\alpha,2-2\alpha,x)+\frac{\Pi(-2\alpha)}{\Pi(-\alpha)}x^\alpha.\varphi(\alpha,2\alpha,x),$$

quibus seriebus secundum formulam (6.) transformatis, est

$$\frac{x^\alpha}{\Pi(\alpha-1)}\int_0^\infty (u+u^2)^{\alpha-1}.e^{-ux}\,du$$

$$=\frac{\Pi(2\alpha-2)}{\Pi(\alpha-1)}x^{1-\alpha}.e^{\frac{x}{2}}.\psi\left(\tfrac{3}{2}-\alpha,\frac{x^2}{16}\right)+\frac{\Pi(-2\alpha)}{\Pi(-\alpha)}x^\alpha.e^{\frac{x}{2}}.\psi\left(\tfrac{1}{2}+\alpha,\frac{x^2}{16}\right)$$

porro si x mutatur in $4\sqrt{x}$, α in $\alpha+\frac{1}{2}$, per reductiones paucas habemus

$$17.\quad \frac{2^{2\alpha+1}.\sqrt{\pi}.x^\alpha.e^{-2\sqrt{x}}}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})}\int_0^\infty (u+u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.e^{-4u\sqrt{x}}.du$$

$$=\Pi(\alpha-1)\,\psi(1-\alpha,x)+\Pi(-\alpha-1)x^\alpha\,\psi(1+\alpha,x),$$

inde per comparationem cum formula (12.) sequitur

$$\int_0^\infty u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}.du = \frac{2^{2\alpha+1}.\sqrt{\pi}.x^\alpha.e^{-2\sqrt{x}}}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})}\int_0^\infty (u+u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.e^{-4u\sqrt{x}}.du,$$

ex hac formula, aut si mavis e formula (12.), posito $\alpha=\frac{1}{2}$, facile deducitur valor persimplex integralis

$$18.\quad \int_0^\infty e^{-u^2}.e^{-\frac{x}{u^2}}.du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-2\sqrt{x}}.$$

Integralia, quae modo invenimus, applicationes multas habent in analysi, ex. gr. in integranda aequatione Riccatiana, quae per substitutiones faciles in formam aequationis (9.) mutari potest; in iis autem non immorabor, sed de aliis etiam integralibus similibus quaestionem instituam, quorum primum accipio hoc:

$$19.\quad z=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(\tfrac{1}{2}x\tang v+\beta v)\,dv.$$

Quantitatem x semper positivam accipio, quum ejus signum negativum in quantitatem β transferri possit. Per differentiationem quantitatis

$$\cos v^{\alpha-1} . \sin(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)$$

est

$$d(\cos v^{\alpha-1} \sin(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)) = -(\alpha-1) \cos v^{\alpha-2} . \sin v . \sin(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv$$
$$+ \left(\frac{x}{2 \cos v^2} + \beta\right) \cos v^{\alpha-1} \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv,$$

et integrando intra limites $v = 0$ et $v = \frac{\pi}{2}$

$$20. \quad 0 = -(\alpha-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-2} . \sin v . \sin(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv$$
$$+ \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-3} . \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv$$
$$+ \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1} . \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv,$$

porro est

$$\frac{dz}{dx} = -\tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-2} . \sin v . \sin(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv,$$
$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\tfrac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-3} . \sin v^2 . \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv,$$

itaque

$$z - 4 \frac{d^2 z}{dx^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-3} \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv,$$

quibus substitutis aequatio (30.) transit in hanc,

$$21. \quad 0 = (x + 2\beta) z + 4(\alpha-1) \frac{dz}{dx} - 4x \frac{d^2 z}{dx^2},$$

haec aequatio per substitutionem $z = e^{-\frac{x}{2}} y$ transformatur in hanc

$$0 = \frac{\beta - \alpha + 1}{2} y + (\alpha - 1 + x) \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2 y}{dx^2},$$

cujus integrale completum est:

$$y = A \varphi\left(\frac{\beta - \alpha + 1}{2}, 1 - \alpha, x\right) + B x^\alpha \varphi\left(\frac{\beta + \alpha + 1}{2}, 1 + \alpha, x\right),$$

et quia $z = e^{-\frac{x}{2}} . y$, est

$$22. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1} . \cos(\tfrac{1}{2} x \operatorname{tang} v + \beta v)\, dv$$
$$= A . \varphi\left(\frac{\beta - \alpha + 1}{2}, 1 - \alpha, x\right) + B x^\alpha \varphi\left(\frac{\beta + \alpha + 1}{2}, 1 + \alpha, x\right).$$

Constantis A determinatio facile obtinetur ponendo $x = \infty$ si α est quantitas positiva, alterius vero constantis determinatio artificia peculiaria poscit; utramque simul constantem obtinebimus hac methodo. Aequatio (22.) multiplicetur per $x^{\lambda-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$ et integretur intra limites $x = 0$ et $x = \infty$, quo facto est

$$23.\quad \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.x^{\lambda-1}e^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{1}{2}x \operatorname{tang} v + \beta v)\,dv\,dx$$
$$= A\int_0^\infty x^{\lambda-1}.e^{-x}\varphi\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}, 1-\alpha, x\right)dx$$
$$+ B\int_0^\infty x^{\lambda+\alpha-1}e^{-x}\,\varphi\left(\frac{\beta+\alpha+1}{2}, 1+\alpha, x\right)dx.$$

Omnium horum integralium valores per functiones notas exprimi possunt, est enim

$$\int_0^\infty x^{c-1}.e^{-x}.\varphi(a,b,x)\,dx = \Pi(c-1)\,F(c,a,b,1),$$

ubi F designat notam seriem hypergeometricam, qua per functionem Π expressa est

$$\int_0^\infty x^{c-1}.e^{-x}\,\varphi(a,b,x)\,dx = \frac{\Pi(c-1)\,\Pi(b-1)\,\Pi(b-a-c-1)}{\Pi(b-a-1)\,\Pi(b-c-1)},$$

porro est

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}.e^{-\frac{x}{2}}.\cos(\tfrac{1}{2}x\operatorname{tang} v + \beta v)\,dx = 2^\lambda\Pi(\lambda-1)\cos v^\lambda.\cos(\lambda+\beta)v,$$

unde illud integrale duplex transit in hoc

$$2^\lambda\,\Pi(\lambda-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos v^{\alpha+\lambda-1}.\cos(\lambda+\beta)v.dv,$$

cujus valor per functionem Π hoc modo exprimitur

$$\frac{\pi.\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\alpha+\lambda-1)}{2^\alpha\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}+\lambda\right)},$$

quibus substitutis aequatio (23.) transit in hanc:

$$\frac{\pi.\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\alpha+\lambda-1)}{2^\alpha\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}+\lambda\right)}$$
$$= A\frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(-\alpha)\,\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}-\lambda\right)}{\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\Pi(-\alpha-\lambda)} + B\frac{\Pi(\alpha+\lambda-1)\,\Pi(\alpha)\,\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}-\lambda\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)\Pi(-\lambda)},$$

haec aequatio facile reducitur ad hanc formam commodiorem

$$\frac{\pi.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\lambda\right)\pi}{2^\alpha\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)} = \frac{A.\Pi(-\alpha)\sin(\alpha+\lambda)\pi}{\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)} + \frac{B.\Pi(\alpha)\sin\lambda\pi}{\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)},$$

quae, quum pro quolibet valore quantitatis λ locum habere debeat, in has duas dilabitur

$$\frac{\pi\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\pi}{2^\alpha\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)} = \frac{A.\sin(\alpha\pi)\,\Pi(-\alpha)}{\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)},$$

$$-\frac{\pi\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\pi}{2^\alpha\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)} = \frac{A.\cos\alpha\pi.\Pi(-\alpha)}{\Pi\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)} + \frac{B.\Pi(\alpha)}{\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)},$$

e quibus facile inveniumtur constantium A et B valores

$$A = \frac{\pi.\Pi(\alpha-1)}{2^\alpha\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}, \qquad B = -\frac{\pi.\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\pi}{2^\alpha.\sin\alpha\pi\,\Pi(\alpha)},$$

quibus denique constantium valoribus in aequatione (22.) substitutis, est

$$24. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{tang}\,v+\beta v)\,dv$$

$$= \frac{\pi.\Pi(\alpha-1)e^{-\frac{x}{2}}.\varphi\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},1-\alpha,x\right)}{2^\alpha\Pi\left(\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)} - \frac{\pi.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pi.x^\alpha.e^{-\frac{x}{2}}\varphi\left(\frac{\beta+\alpha+1}{2},1+\alpha,x\right)}{2^\alpha\sin\alpha\pi\,\Pi(\alpha)}.$$

Hujus formulae casus speciales persimplices sunt:

$$25. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(x\,\mathrm{tang}\,v-(\alpha+1)v)\,dv = \frac{\pi.x^\alpha.e^{-x}}{\Pi(\alpha)},$$

$$26. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(x\,\mathrm{tang}\,v+(\alpha+1)v)\,dv = 0,$$

quorum alter obtinetur posito $\beta=-\alpha-1$, alter posito $\beta=\alpha+1$. E conjunctis formulis (25.) et (26.) sequuntur etiam hae

$$27. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(x\,\mathrm{tang}\,v)\cos(\alpha+1)v.dv = \frac{\pi.x^\alpha.e^{-x}}{2\Pi(\alpha)},$$

$$28. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\sin(x\,\mathrm{tang}\,v)\sin(\alpha+1)v.dv = \frac{\pi.x^\alpha.e^{-x}}{2\Pi(\alpha)}.$$

Formulae (25.) et (26.) cum formula ab Ill. *Laplace* inventa consentiunt, quam postea alii aliis modis demonstrarunt, cfr. huj. diarii tom. XIII. p. 231,

ubi Cl. *Liouville* per methodum differentiationis ad indices qualescunque invenit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}.\,d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^{\mu}} = \frac{2\pi.\,e^{-x}}{\Gamma(\mu)}.$$

Persimplex aliud integrale praebet formula (24.) posito $\beta=\alpha-1$

$$29. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{\alpha-1}.\cos(x \operatorname{tang} v+(\alpha-1)v)\,dv = \frac{\pi e^{-x}}{2^{\alpha}}.$$

Series duae, quae in altera parte aequationis (24.) insunt, posito $\beta=0$, fiunt $\varphi\left(\frac{1-\alpha}{2}, 1-\alpha, x\right)$ et $\varphi\left(\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha, x\right)$, eaeque per formulam (6.) in series generis ψ transformari possunt. Iis transformationibus peractis, si mutatur α in 2α, x in $4\sqrt{x}$ prodit formula

$$10. \quad \frac{2\Pi(\alpha-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{2\alpha-1}.\cos(2\sqrt{x} \operatorname{tang} v)\,dv$$
$$= \Pi(\alpha-1)\,\psi(1-\alpha, x)+\Pi(-\alpha-1).\,x^{\alpha}.\,\psi(1+\alpha, x),$$

inde per comparationem cum formula (12.) est

$$31. \quad \frac{2\Pi(\alpha-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{2\alpha-1}.\cos(2\sqrt{x} \operatorname{tang} v)\,dv = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1}.e^{-u}.e^{-\frac{x}{u}}.du.$$

Simili modo demonstrari potest nexus duorum integralium, quae in aequationibus (13.) et (24.) continentur; haec enim formula (24.), si ponitur $\alpha-\beta$ loco α, $\alpha+\beta-1$ loco β et multiplicatur per $\frac{1}{\pi}\Pi(-\beta).2^{\alpha}.e^{\frac{x}{2}}.x^{\beta}$, accipit formam

$$32. \quad \frac{2\Pi(-\beta).e^{\frac{x}{2}}.x^{\beta}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^{\alpha-\beta-1}.\cos(\tfrac{1}{2}x \operatorname{tang} v+(\alpha+\beta-1)v)\,dv$$
$$= \frac{\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)} x^{\beta}\,\varphi(\beta, \beta-\alpha+1, x)+\frac{\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)} x^{\alpha}\,\varphi(\alpha, \alpha-\beta+1, x),$$

qua comparata cum formula (13.) cognoscitur esse

$$33. \quad \int_0^{\infty} \frac{u^{\beta-1}.\,e^{-ux}.\,du}{(1+u)^{\alpha}}$$
$$= \frac{2.e^{\frac{x}{2}}}{\sin\beta\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^{\alpha-\beta-1}.\cos(\tfrac{1}{2}x \operatorname{tang} v+(\alpha+\beta-1)v)\,dv;$$

praeterea, si aequationis (32.) altera pars per formulam (7.) transformatur, est

$$34. \quad \frac{2\Pi(-\beta)e^{\frac{x}{2}}.x^{\beta}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^{\alpha-\beta-1}.\cos(\tfrac{1}{2}x \operatorname{tang} v+(\alpha+\beta-1)v)\,dv = \chi(\alpha, \beta, x).$$

Generalius etiam integrale simili modo tractabimus

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(x \operatorname{tang} v + \gamma v)\, dv$$

eosque casus eligemus, quibus per series supra citatas exprimi possit. Quantitatem x etiam in hoc integrali semper positivam accipimus, quum ejus signum negativum in quantitatem γ transferre liceat. Differentiando formam $\sin v^{\alpha} . \cos v^{\beta} . \cos(x \operatorname{tang} v + \gamma v)$, deinde integrando ab $u = 0$ usque ad $u = \frac{\pi}{2}$, fit

$$\begin{aligned} 0 = & \;\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta+1} . \cos(x \operatorname{tang} v + \gamma v)\, dv \\ & - \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha+1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(x \operatorname{tang} v + \gamma v)\, dv \\ & - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha} . \cos v^{\beta-2} . \sin(x \operatorname{tang} v + \gamma v)\, dv \\ & - \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha} . \cos v^{\beta} . \sin(x \operatorname{tang} v + \gamma v)\, dv, \end{aligned}$$

ex hac aequatione, si integralia per y eiusque differentialia exprimuntur, facile deducitur haec aequatio differentialis tertii ordinis:

$$35. \quad 0 = \alpha y + (\gamma + x) \frac{dy}{dx} + (\beta - 2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{d^3 y}{dx^3},$$

nunc si ponitur

$$36. \quad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

facile inveniuntur aequationes conditionales, quae inter coëfficientes hujus seriei locum habere debunt, ut aequationi differentiali haec series satisfaciat:

$$\alpha A_0 + \gamma . 1 . A_1 - 1.2.(2-\beta) A_2,$$
$$(\alpha + 1) A_1 + \gamma . 2 . A_2 - 2.3.(3-\beta) A_3,$$

et generaliter

$$37. \quad (\alpha + k) A_k + \gamma . (k+1) A_{k+1} - (k+1)(k+2)(k+2-\beta) A_{k+2}.$$

Eodem modo si ponitur

$$38. \quad y = x^{\beta}(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots)$$

inveniuntur hae coëfficientium relationes

$$\gamma . \beta . B_0 - \beta(\beta + 1) . 1 . B_1,$$
$$(\alpha + \beta) B_0 + \gamma(\beta + 1) B_1 - (\beta + 1)(\beta + 2) . 2 . B_2,$$

et generaliter

$$39. \quad (\alpha + \beta + k) B_k + \gamma(\beta + k + 1) B_{k+1} - (\beta + k + 1)(\beta + k + 2)(k + 2) B_{k+2},$$

inde patet aequationis (35.) integrale completum esse

$$40. \quad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + x^\beta (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 \dots),$$

nam per aequationes (37.) quantitatum A_0, A_1, A_2 etc. duae, et per aequationes (39.) quantitatum B_0, B_1, B_2 etc. una arbitrariae manent, ita ut hoc integrale tres constantes arbitrarias contineat. Itaque, si pro y integrale supra propositum restituitur, est

$$41. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(x \operatorname{tang} v + \gamma v) \, dv$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + x^\beta (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots).$$

E relationibus coëfficientium facile cognoscitur, has series et hoc integrale generale transcendentes altiores esse quam eas de quibus hic agere constituimus; attamen casibus quibusdam specialibus cum illis congruunt. Primum, si accipimus $\gamma = \alpha + \beta$, ex aequationibus (39.) sequitur

$$B_1 = \frac{\alpha+\beta}{1(1+\beta)} B_0,$$
$$B_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{1.2.(1+\beta)(2+\beta)} B_0,$$
$$B_3 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\beta+\beta+2)}{1.2.3(1+\beta)(2+\beta)(3+\beta)} B_0$$
etc. etc.

Porro, si β est positivum, posito $x = 0$, ex aequat. (41.) sequitur

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(\alpha+\beta) v . dv = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2} \Pi(\alpha-1) \Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)},$$

eodem modo si aequatio (41.) differentiatur secundum x et postea ponitur $x = 0$, fit

$$A_1 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha} . \cos v^{\beta-2} . \sin(\alpha+\beta) v \, dv = -\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2} . \Pi(\alpha) \Pi(\beta-2)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}$$

est igitur

$$A_1 = \frac{\alpha}{1(1-\beta)} A_0,$$

inde ex aequationibus (37.) facile sequitur

$$A_2 = \frac{\alpha(\alpha+1) A_0}{1.2(1-\beta)(2-\beta)},$$
$$A_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) A_0}{1.2.3(1-\beta)(2-\beta)(3-\beta)}$$
etc. etc.

Hoc igitur casu, quo $\gamma = \alpha + \beta$, series duae, per quas integrale nostrum expressimus, ad hoc genus serierum pertinent, quod supra per Φ designa-

vimus, et formula (41.) transit in hanc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta)v) dv$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} \Phi(\alpha, 1-\beta, x) + B_0 x^\beta \Phi(\alpha+\beta, 1+\beta, x).$$

In determinanda constante B_0 methodo eadem utemur ac supra in determinandis constantibus aequationis (22.). Multiplicando per $x^{\lambda-1}.e^{-x}.dx$ et integrando intra limites 0 et ∞ fit

$$\Pi(\lambda-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta+\lambda-1} . \cos(\alpha+\beta+\lambda) v\, dv$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)\,\Pi(\lambda-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} F(\lambda, \alpha, 1-\beta, 1)$$
$$+ B_0 \Pi(\beta+\lambda-1) F(\lambda+\beta, \alpha+\beta, 1+\beta, 1),$$

iisque seriebus hypergeometricis cum integrali per functionem Π expressis, est

$$\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta+\lambda-1)}{\Pi(\alpha+\beta+\lambda-1)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(-\beta-\alpha-\lambda)}{\Pi(\alpha+\beta-1)\,\Pi(-\alpha-\beta)\,\Pi(-\beta-\lambda)}$$
$$+ B_0 \frac{\Pi(\beta+\lambda-1)\,\Pi(\beta)\,\Pi(-\beta-\alpha-\lambda)}{\Pi(-\alpha)\,\Pi(-\beta)}$$

post reductiones nonnullas quantitas λ, quod debet, omnino evanescit, et predit valor persimpex constantis B_0

$$B_0 = \cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(-\beta-1),$$

quo denique substituto habemus

$$42. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} . \cos v^{\beta-1} . \cos(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta)v)$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} \Phi(\alpha, 1-\beta, x)$$
$$+ x^\beta \cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(-\beta-1)\,\Phi(\alpha+\beta, 1+\beta, x).$$

Formula similis ex hac deducitur mutando α in $\alpha-1$, β in $\beta+1$ et differentiando

$$42. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta) v)\, dv$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\,\Phi(\alpha, 1-\beta, x)$$

$$+ x^\beta \sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(-\beta-1)\,\Phi(\alpha+\beta, 1+\beta, x)$$

iisque formulis inter se comparatis, cognoscitur nexus duorum integralium

$$43. \quad \cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta) v)\, dv$$

$$= \sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\cos(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta) v)\, dv,$$

quae formula etiam hoc modo exhiberi potest

$$44. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin\left(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta) v - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dv = 0.$$

Notatu dignus est formulae (42.) casus specialis, quo $\alpha = 0$

$$45. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos v^{\beta-1}.\sin(x \operatorname{tang} v + \beta v)}{\sin v}\, dv = \frac{\pi}{2},$$

cujus casum specialiorem, valori $x = 0$ respondentem cl. *Liouville* invenit hoc diario tom. XIII. pag. 232. Praeterea e comparatis formulis (42.) et (13.) sine ulla difficultate cognoscitur nexus hujus integralis cum illis quae supra tractavimus

$$46. \quad \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\, x^\beta \int_0^\infty \frac{u^{\alpha+\beta-1}.e^{-ux}\, du}{(1+u)^\alpha}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\cos(x \operatorname{tang} v + (\alpha+\beta) v)\, dv.$$

Alius casus, quo series formulae (41.) in series per characterem Φ designatas redeunt, est $\gamma = -\alpha-\beta$, hoc enim casu facile eodem modo ac supra invenitur formulam (41.) transire in hanc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1} \cos v^{\beta-1}.\cos(x \operatorname{tang} v - (\alpha+\beta) v)\, dv$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\,\Phi(\alpha, 1-\beta, -x) + B_0 x^\beta\,\Phi(\alpha+\beta, 1+\beta, -x),$$

sed hoc casu constans B_0 alium valorem accipit, quem invenimus multiplicando per $x^{\alpha+\beta}.e^{-x}\, dx$ et integrando intra limites $x = 0$ et $x = \infty$, iis integrationibus peractis fit:

$$\Pi(\alpha+\beta-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\alpha+2\beta-1}.\,dv$$

$$= \cos\frac{\alpha\pi}{2}\Pi(\alpha-2)\,\Pi(\beta-1)\,F(\alpha+\beta,\alpha,1-\beta,-1)$$

$$+B_0\Pi(\alpha+2\beta-1)\,F(\alpha+2\beta,\alpha+\beta,1+\beta,-1),$$

etiam hae series hypergeometricae, quarum elementum quartum est $=-1$, per functionem Π exprimi possunt secundum formulam

$$F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1) = \frac{2^{-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\beta)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)},$$

quam demonstravi in commentatione de serie hypergeometrica h. diar. tom. XV. pag. 135. Inde si integrale illud et series hypergeometrica per functionem Π exprimuntur, post faciles quasdam reductiones prodit:

$$B_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\pi\,\Pi(-\beta-1),$$

eoque constantis valore substituta est:

$$47.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\cos(x\,\mathrm{tang}\,v-(\alpha+\beta)v)\,dv$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\,\Phi(\alpha,1-\beta,-x)$$

$$+x^\beta\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\pi\,\Pi(-\beta-1)\,\Phi(\alpha+\beta,1+\beta,-x).$$

Formula similis ex hac facile deducitur mutando α in $\alpha-1$, β in $\beta+1$ et differentiando secundum variabilem x

$$48.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin(x\,\mathrm{tang}\,v-(\alpha+\beta)v)$$

$$= -\frac{\sin\frac{\alpha\beta}{2}\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\,\Phi(\alpha,1-\beta,-x)$$

$$-x^\beta.\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\pi\,\Pi(-\beta-1)\,\Phi(\alpha+\beta,1+\beta,-x).$$

Hae formulae (47.) et (48.) duobus modis facile ita conjungi possunt, ut has formas simpliciores obtineant:

$$49.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin\left(x\,\mathrm{tang}\,v-(\alpha+\beta)v+\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\pi\right)dv$$

$$= \frac{\pi\,\Pi(\alpha-1)\,\varphi(\alpha,1-\beta,-x)}{\Pi(-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta-1)},$$

$$50.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{\alpha-1}.\cos v^{\beta-1}.\sin\left(x \operatorname{tang} v-(\alpha+\beta)v+\frac{\alpha\pi}{2}\right)dv$$
$$=\frac{\pi x^\beta}{\Pi(\beta)}\varphi(\alpha+\beta,1+\beta,-x).$$

In omnibus integralibus que hic tractata sunt, uti jam supra monuimus, x semper esse debet quantitas positiva, si vero x acciperetur negativum, omnes summae inventae falsae essent; in eo praecipue notatu dignum est integrale aequationis (50.), quod pro positivo x seriei illi aequale est, sed pro negativo x evanescit, cfr. aequat. (44.).

d. Lignicii, mense aprili a. 1837.

13.

Note sur une transformation générale de la formule fondamentale de la mécanique.

(Par *M. Pagani* à Louvain.)

L'état dynamique d'un point matériel est défini par l'équation symbolique

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z = \Sigma P \delta p$$

que l'on peut écrire simplement de cette manière

$$1. \quad \frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + = \Sigma P \delta p,$$

Dans cette équation les lettres x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires du point matériel au bout du temps t, en supposant l'origine et la direction de ces lignes, fixes dans l'espace. La lettre P dénote une force accélératrice qui agit sur le point matériel dans le sens de la droite p menée de ce point au centre de la force. La quantité P est positive ou négative selon que la force tend à éloigner ou à rapprocher le point matériel du centre d'action. Enfin les variations marquées par la lettre δ se rapportent aux déplacements infiniment petits du point matériel, compatibles avec les équations de condition qui peuvent exister entre les quantités x, y, z et t. Il est bon de remarquer que la caractériste δ ne peut jamais affecter la variable qui exprime le temps.

Pour un système de molécules, au lieu de la formule (1.) on aura

$$(2.) \quad \mathrm{S}\, m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x +\right) = \mathrm{S}\, m\, \Sigma P \delta p,$$

où la lettre m désigne la masse d'une molécule quelconque du système, et le signe S une somme qui doit s'étendre à toutes les molécules. Le signe Σ indique dans les deux formules, une somme relative aux forces qui sollicitent chaque molécule m. En supprimant le signe S et en divisant les deux membres par m, la formule (2.) devient la formule (1.).

Les transformations que l'on fait subir à la formule fondamentale (2.) pour en rendre les diverses applications plus faciles, dépendent de la nature du problême que l'on veut résoudre et des équations de condition. Cependant on peut donner à la formule (2.) plusieurs formes générales et

indépendantes de la nature de chaque question. Ces formes dépendent uniquement du système de coordonnées que l'on adopte, et pour les obtenir plus facilement il faut considérer séparément les deux membres de la formule fondamentale.

Occupons-nous d'abord du second membre dont les transformations sont toujours les plus faciles. On les obtiendra dans tous les cas en imaginant par le point m trois droites rectangulaires et respectivement parallèles aux élémens des nouvelles coordonnées de ce point. En désignant $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, les variations des nouvelles coordonnées, et par A, B, C les sommes des projections algébriques des forces ΣP sur les droites parallèles aux élémens $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$; on aura

$$\mathrm{S}m\Sigma P\delta p = \mathrm{S}m(A\delta\alpha + B\delta\beta + C\delta\gamma),$$

ou simplement

$$3.\quad \mathrm{S}m\Sigma P\delta p = \mathrm{S}m(A\delta\alpha +).$$

Les forces A, $+$, seront positives ou négatives suivant qu'elles tendront à augmenter ou à diminuer les variables α, $+$.

On connaît la transformation du premier membre de la formule (2.) relative aux coordonnées polaires; c'est-à-dire qu'en supposant

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,$$

on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x +\right) = \mathrm{S}m&\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right)\delta r\\ &+ \mathrm{S}m\left(\frac{d.r^2d\theta}{dt^2} - r^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right)\delta\theta\\ &+ \mathrm{S}m\frac{d.r^2\sin^2\theta\, d\psi}{dt^2}.\delta\psi.\end{aligned}$$

Dans ce cas on aura

$$\mathrm{S}m\Sigma P\delta p = \mathrm{S}m(R\delta r + Tr\delta\theta + \Psi r\sin\theta\,\delta\psi),$$

où $+R$ désigne la résultante des forces qui sollicitent m, projetée sur le rayon vecteur r et tendante à augmenter cette variable; $+T$ la projection algébrique de la résultante sur la perpendiculaire au rayon r menée dans le plan des r, z, et tendante à augmenter la variable θ; et $+\Psi$, la projection algébrique de le même force sur la perpendiculaire au plan des r, θ, et tendante à augmenter la variable ψ.

Mais il y a une transformation générale peu connue et qui mérite pourtant de l'être, à cause de l'extrême simplicité de la forme sous laquelle on peut, à son moyen, présenter la formule fondamentale, et résoudre ensuite avec facilité plusieurs questions intéressantes de la mécanique.

Pour l'effectuer, imaginons par le point m trois droites; la première dans le prolongement du rayon osculateur de la trajectoire de m; la seconde, tangente à cette courbe, dans le sens du mouvement de la molécule m; et la troisième perpendiculaire au plan de ces deux droites. Nommons R, S, N les projections algébriques de la résultante des forces qui sollicitent m, sur les droites ϱ, τ, ν, respectivement parallèles aux trois droites dont on vient de parler, on aura premièrement, conformément à la formule (3.),

$$\Sigma P\delta p = R\delta\varrho + S\delta\tau + N\delta\nu.$$

Mais il est aisé de voir que l'on doit avoir $\delta\tau = \delta s$, en désignant par s la longueur variable de l'arc décrit par la molécule. On aura donc

$$4. \quad \mathrm{S}m\Sigma P\delta p = \mathrm{S}m(R\delta\varrho +).$$

Pour transformer le premier membre de la formule fondamentale, on observera que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Partant

$$d\frac{dx}{dt} = d\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{ds}{dt}\,d\frac{dx}{ds};$$

d'où l'on a

$$d.\frac{dx}{dt}\delta x + = d\frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\delta x +\right) + \frac{ds}{dt}\left(d\frac{dx}{ds}\delta x +\right).$$

D'ailleurs, il est évident que l'on doit avoir en général

$$\delta\sigma = (\sigma x)\delta x +,$$

la notation (σx) servant à exprimer le cosinus de l'angle que fait l'élément $\delta\sigma$ avec l'élément δx. Par conséquent l'équation précédente donnera

$$d\frac{dx}{dt}\delta x + = d\frac{ds}{dt}\,\delta\sigma - \frac{ds^2}{\varrho\,dt}\,\delta\varrho.$$

En substituant cette valeur dans la formule (2.), on obtient cette transformée très simple

$$5. \quad \mathrm{S}m\left(\frac{d^2 s}{d^2 t}\delta s - \frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{\delta\varrho}{\varrho}\right) = \mathrm{S}m\Sigma P\delta p.$$

En combinant cette formule avec la formule (4.) et en posant $v = \frac{ds}{dt}$, on a celle-ci

$$6. \quad \mathrm{S}m\left[\left(\frac{d^2 s}{dt^2} - \mathrm{S}\right)\delta s - \left(\frac{v^2}{\varrho} + R\right)\delta\varrho - N\delta\nu\right] = 0$$

qui peut servir à démontrer toute la théorie des forces centrifuges.

En appliquant la formule (6.) au cas du mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe, l'état dynamique du point sera défini par l'équation symbolique

$$7.\quad \left(\frac{d^2s}{dt^2}-S\right)\delta s = \left(\frac{v^2}{\varrho}+R\right)\delta\varrho + N\delta\nu.$$

Le déplacement virtuel du point matériel donnant $\delta\varrho = 0$, $\delta\nu = 0$, le mouvement sera défini par l'équation

$$8.\quad \frac{d^2s}{dt^2}-S = 0.$$

Pour connaître ensuite la pression que doit éprouver la courbe, il faut introduire dans la formule (7.) une nouvelle force inconnue agissant dans le plan normal à la trajectoire, et égaler ensuite à zéro chaque coëfficient des variations δs, $\delta\varrho$, $\delta\nu$. En désignant cette force par L, et la droite, suivant laquelle s'exerce son action, par λ; les composantes de la pression dans le sens des lignes ϱ et ν, seront $L(\lambda\varrho)$, $L(\lambda\nu)$. On aura donc, outre l'équation (8.) relative au mouvement du point matériel, les deux suivantes

$$\frac{v^2}{\varrho}+R+L(\lambda\varrho) = 0,\qquad N+L(\lambda\nu) = 0,$$

qui doivent servir à la détermination de L et des connus $(\lambda\varrho)$, $(\lambda\nu)$, des angles que fait sa direction avec le prolongement du rayon osculateur ϱ et avec la droite ν.

En combinant ces deux équations pour élimines les cosinus on trouve

$$9.\quad L^2 = N^2+R^2+2\frac{Rv^2}{\varrho}+\frac{v^4}{\varrho^2}.$$

Exemple. Calculer la pression de la courbe brachystochrone tracée sur une surface cylindrique verticale.

Le plan des x, y étant supposé horizontal, et l'axe des z, dirigé dans le sens de la pesanteur g, l'équation différentielle de la brachystocrone est comme l'on sait

$$10.\quad dz = ds\sqrt{\left(1-\frac{z}{a}\right)},$$

d'où l'on déduit, en posant pour abréger

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx;$$

$$11.\quad (1+p^2)\frac{dx^2}{ds^2} = \frac{z}{a},\quad (1+p^2)\frac{dy^2}{ds^2} = \frac{p^2z}{a}.$$

D'un autre côté l'on doit avoir, dans ce cas,

$$R = g(\varrho z),\quad N = g(\nu z);$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (9.) en observant que l'on a

$$(\varrho z)^2+(\nu z)^2 = 1-\frac{dz^2}{ds^2},$$

on trouvera

$$L^2 = g^2\left(1-\frac{dz^2}{ds^2}\right)+\frac{2gv^2}{\varrho}(\varrho z)+\frac{v^4}{\varrho^2}.$$

Maintenant si l'on fait attention que

$$(\varrho z) = -\varrho\frac{d^2z}{ds^2},$$

on aura, en vertu de l'équation (10.),

$$(\varrho z) = \frac{\varrho}{2a}.$$

Partant

$$L^2 = 2g^2z\left(\frac{2z}{\varrho^2}+\frac{3}{2a}\right).$$

Si l'on veut éliminer de cette valeur de la pression le rayon osculateur de la trajectoire, on observera que les équations étant différentiées et combinées ensemble donnent

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{4az}-\frac{1}{4a^2}+\frac{q^2z^2}{a^2(1+p^2)^2}.$$

Mais on sait que

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2;$$

par conséquent, si l'on désigne par γ le rayon osculateur de la projection horizontale de la surface cylindrique, et si l'on a égard à l'équation (10.) on aura

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{4az}+\frac{z^2}{a^2\gamma^2}.$$

En substituant cette valeur dans la dernière expression de L^2, on trouvera enfin

$$L = 2g\sqrt{\left[\frac{z}{a}\left(1+\frac{z^2}{a\gamma^2}\right)\right]}.$$

En faisant $\frac{1}{\gamma}=0$ on a le cas de la brachystochrone plane, et la pression sur cette courbe qui est une cycloïde verticale sera exprimée par la formule très simple

$$L = 2g\sqrt{\frac{z}{a}}.$$

Le maximum de L correspondant au maximum de $z=a$, la plus grande pression dans le cas général, sera donné par la formule

$$L = 2g\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{\gamma^2}\right)}.$$

Liège le 10. Juin 1835.

14.

De transformatione expressionis $\frac{\partial y}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$ in formam simpliciorem $\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2 xx)]}}$, adhibita substitutione $x = \frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2}$.

(Scr. Dr. *Rud. Aug. Luchterhandt*, Mariaeinsulanus, Magister superior.)

Duplex in universum problema propositum solvendi genus cogitari potest. Alterum eo constat, ut expressio $\frac{\partial y}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$, substituendo valorem ipsius y in formam $\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}}$ transformetur. At quantitas y irrationaliter per variabilem x exprimitur, unde fit, ut expressio, facta substitutione sub radicali denominatoris oriunda, irrationales argumenti x contineat functiones. Quae quidem res impedimento est, quominus a priori apta ad problematis solutionem methodus inveniatur. Quam ob causam ad alterum problema tractandi genus confugere praestat. Quod eo consistit, ut expressio $\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}}$, substituto valore ipsius x, constantibusque a, a', a'', b', b'' rite determinatis formam $\frac{\partial y}{\sqrt{[(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$ induat. Sub oculos cadit, hanc viam esse priore multo planiorem, quippe quia difficultati illi, quae ex irrationali substitutione ortum ducet, hic nihil est loci. Quam ingrediamur.

Methodi, quibus utemur, eaedem sunt atque in *Fundamentis novis th. f. ellipt* a Cl. *Jacobi* adhibitae, ubi problema propositum indicatum invenis pag. 17.

Expressio $\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}}$, posito $x = \frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2} = \frac{U}{V}$ abit in sequentem

$$\frac{V\partial U - U\partial V}{M\sqrt{[(V-U)(V+U)(V-\varkappa U)(V+\varkappa U)]}},$$

in qua functio, quae sub radicali continetur, ad octavum usque ordinem

adsurgit, unusquisque enim quatuor factorum $V-U$, $V+U$, $V-\varkappa U$, $V+\varkappa U$ secundi est ordinis. Quodsi igitur duo e quatuor factoribus modo dictis fierent quadratici, functio, quae sub radicale remaneret, quarti foret ordinis. Quod ut eveniat, duae requiruntur aequationes conditionales inter constantes indeterminatas, ita ut tres earum arbitrariae sunt, quae iuxta cum multiplicatore M et modulum $\varkappa$ eo adhiberi possunt, ut functioni sub radicali forma $(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)$ concilietur.

Posito, factores $V-\varkappa U$, $V+\varkappa U$ fieri quadraticos, reputatisque relationibus,

$$(V-\varkappa U)\partial U-U\partial(V-\varkappa U) = V\partial U-U\partial V,$$
$$(V+\varkappa U)\partial U-U\partial(V+\varkappa U) = V\partial U-U\partial V$$

liquet, unamquamque functionem, quae unum ex factoribus $V-\varkappa U$, $V+\varkappa U$ bis metiatur, et expressionem $\frac{V\partial U-U\partial V}{\partial y}$ metiri. Est vero quantitas $\frac{V\partial U-U\partial V}{\partial y}$ secundi ordinis, ejusdemque est radix secunda e duobus factoribus quadraticis; ideoque secundum proprietatem, modo commemoratam, quotiens

$$\frac{V\partial U-U\partial V}{\partial y\sqrt{[(V-\varkappa U)(V+\varkappa U)]}}.$$

aequalis fit quantitati cuidam constanti.

Quia unusquisque factorum $V-U$, $V+U$, $V-\varkappa U$, $V+\varkappa U$ est functio secundi ordinis ipsius elementi y, duo postrema adeo quadrata, ponere licet:

$$1)\quad V-U = A(y-\alpha)(y-\beta),$$
$$2)\quad V+U = B(y-\gamma)(y-\delta),$$
$$3)\quad V-\varkappa U = C(y+m)^2,$$
$$4)\quad V+\varkappa U = D(y+n)^2,$$

designantibus A, B, C, D constantes, quarum una pro lubito assumi potest.

Posito et $y=\alpha$ et $y=\beta$ erit ex aequat. 1), $V=U$; ideoque secundum aeqq. 2) et 3) obtinetur:

$$\frac{1-\varkappa}{2} = \frac{C(\alpha+m)^2}{B(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}; \qquad \frac{1-\varkappa}{2} = \frac{C(\beta+m)^2}{B(\beta-\gamma)(\beta-\delta)},$$

unde

$$\frac{\alpha+m}{\beta+m} = \pm\frac{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}};$$

ergo, prout superius an inferius sumseris signum, erit:

$$m = m_1 = \frac{\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]} - \alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} - \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}},$$

$$m = m_2 = -\frac{\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]} + \alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} + \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}}.$$

Si in locum aequationis 3) adhibemus 4), videmus iisdem quantitatibus determinari n atque m; at m et n aequales esse nequeunt; haberetur enim $\frac{V-\varkappa U}{V+\varkappa U} = \frac{C}{D}$ ideoque ipsa x constanti aequalis; ergo alter valorum m_1, m_2 quantitati n, alter quantitati m aequiparandus est.

Si posuisses $y=\gamma$, $y=\delta$, aequationesque 1), 3) et 4) adhibuisses ad valores ipsarum m et n eruendos, tum obtinuisses:

$$m_1 = -\frac{\gamma\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]} + \delta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]} + \sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]}},$$

$$m_2 = \frac{\delta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]} - \gamma\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]} - \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]}}.$$

Quos valores cum supra inventis identicos esse, facile patet; si ex denominatoribus radicalia tollis, ex utrisque valoribus obtines:

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\mp(\alpha\beta-\gamma\delta) \pm \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}.$$

Est igitur, substitutis ipsarum m et n valoribus, $n=m_1$, $m=m_2$:

1) $V-U = A(y-\alpha)(y-\beta)$,

2) $V+U = B(y-\gamma)(y-\delta)$,

3) $$V-\varkappa U = C\left[y - \frac{\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]} + \alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} + \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}}\right]^2$$
$$= C\left[y + \frac{\delta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]} - \gamma\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]} - \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]}}\right]^2,$$

4) $$V+\varkappa U = D\left[y + \frac{\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]} - \alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} - \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}}\right]^2$$
$$= D\left[y - \frac{\gamma\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]} + \delta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]} + \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]}}\right]^2.$$

Posito $y=\alpha$, quo casu $V=U$, obtinetur ex aeqq. 3) et 4):

$$a. \quad \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{C[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} - \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}]^2}{D[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} + \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}]^2}.$$

Facto porro $y=\gamma$, quo casu $V=-U$, ex iisdem aeqq. 3) et 4) sequitur:

$$b. \quad \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} = \frac{C}{D}\cdot\left[\frac{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)]} + \sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]} - \sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]}}\right]^2.$$

Aequationibus (*a.*) et (*b.*) in se ductis, fit

$$\frac{C^2}{D^2} = \frac{[\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))} - \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\delta))}]^2\,[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} + \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}]^2}{[\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))} - \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\delta))}]^2\,[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} + \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}]^2};$$

unde, cum e constantibus C, D altera ex arbitrio accipi possit, statuere licet:

$$C = [\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))} - \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\delta))}]\,[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} + \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}],$$

$$D = [\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))} + \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\delta))}]\,[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} - \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}].$$

Divisa autem aequatione (*a.*) per aequationem (*b.*), nanciscimur

$$\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2 = \frac{[\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))} - \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\gamma))}]^2}{[\sqrt{((\alpha-\gamma))(\beta-\delta)} + \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\gamma))}]^2},$$

unde sequitur

$$\varkappa = \frac{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}}.$$

Cum sit

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = (\alpha-\beta)(\gamma-\delta) + (\alpha-\delta)(\beta-\gamma),$$

e valore ipsius $\varkappa$ invento sequitur etiam:

$$\sqrt{(1-\varkappa^2)} = \sqrt{\left(\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\right)}.$$

Ad valores constantium A et B determinandos ponatur

$$y = -m = \frac{\alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} + \beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}}{\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]} + \sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}},$$

quo casu $V = \varkappa U$; quo facto ex aequationibus 1) et 4) erit

$$\frac{\varkappa-1}{2\varkappa} = \frac{-A[\sqrt{((\beta-\gamma)(\beta-\delta))} - \sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta))}]}{4\sqrt{((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta))}[\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))} + \sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\delta))}]},$$

unde

$$A = -2(\gamma-\delta)\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}.$$

Simili modo ex aequationibus 3), 2) et 4) obtinetur

$$B = -2(\alpha-\beta)\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}.$$

Ope aequationis

$$(V-\varkappa U)\,\partial(V+\varkappa U) - (V+\varkappa U)\,\partial(V-\varkappa U) = 2\varkappa(V\partial U - U\partial V)$$

fit

$$\frac{V\partial U - U\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\varkappa}\,C.D.(m-n)(m+y)(n+y),$$

ergo

$$\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}} = \frac{C.D(m-n)(m+y)(n+y)\,\partial y}{\varkappa M\sqrt{[A.B.C.D(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)(m+y)^2(n+y)^2]}}$$

$$= \frac{(m-n)\,\partial y}{\varkappa M\sqrt{\left(\frac{A.B}{C.D}(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\right)}}.$$

Est vero, omnibus factis reductionibus,

$$m-n = \frac{2\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}}{\gamma+\delta-(\alpha+\beta)},$$

est porro

$$\sqrt{\left(\frac{A.B}{C.D}\right)} = \frac{2\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}}{(\gamma+\delta)-(\alpha+\beta)},$$

est denique $\frac{m-n}{z\sqrt{\left(\frac{A.B}{C.D}\right)}}=\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}$: ergo $M=\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}$.

Quibus omnibus collectis, sequitur, fieri

$$\frac{\partial x}{M\sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2))}}=\frac{\partial y}{\sqrt{((y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta))}},$$

posito

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\gamma-\delta)(y-\alpha)(y-\beta)}{(\alpha-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)},\quad \varkappa=\frac{\sqrt{((\alpha-\delta)(\beta-\gamma))}}{\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}},\quad M=\sqrt{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}.$$

E formulis antecedentibus derivantur aliae, quantitatibus α, β, γ, δ inter se permutatis.

Si quantitates α, β, γ, δ sunt reales, atque ita comparatae, ut $\alpha>\beta>\gamma>\delta$ sit, tum singulis casibus, quibus elementum y inter limites $\alpha\ldots.\pm\infty\ldots.\delta$; γ et β; γ et δ; β et α continetur, respondent substitutiones, quas tabula I., quae sequitur, exhibet; e quibus, eodem remedio, quod in „Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum" pag. 11 indicatum est, facile formulae, quae transformandae expressioni

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)]}}$$

inserviunt, derivari possunt, quaeque in Tabula II. proponuntur.

Tabula I.

A. $$\frac{\partial y}{\sqrt{[+(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}=\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}};$$

$$\varkappa=\frac{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}};\qquad M=\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}.$$

I. Limites $\alpha\ldots.\pm\infty\ldots.\delta$; $\quad\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\alpha-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}{(\gamma-\delta)(y-\alpha)(y-\beta)}$.

II. Limites $\gamma\ldots\ldots\ldots\beta$; $\quad\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\gamma-\delta)(\alpha-y)(\beta-y)}{(\alpha-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}$.

B. $$\frac{\partial y}{\sqrt{[-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}=\frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}};$$

$$\varkappa=\frac{\sqrt{[(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}};\qquad M=\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}.$$

I. Limites $\delta\ldots.\gamma$; $\quad\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\alpha-\delta)(\beta-y)(\gamma-y)}{(\beta-\gamma)(y-\delta)(\alpha-y)}$.

II. Limites $\beta\ldots.\alpha$; $\quad\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\beta-\gamma)(y-\delta)(\alpha-y)}{(\alpha-\delta)(y-\gamma)(y-\beta)}$.

Tabula II.

A. $$\frac{\partial y}{\sqrt{[+(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)]}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}};$$
$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\beta-\gamma)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)}}; \quad M = \sqrt{(\alpha-\gamma)}.$$

I. Limites $\alpha \ldots\ldots +\infty$; $\quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{(\alpha-\beta)(y-\gamma)}{(y-\alpha)(y-\beta)}$.

II. Limites $\gamma \ldots\ldots\ldots \beta$; $\quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{(\alpha-y)(\beta-y)}{(\alpha-\beta)(y-\gamma)}$.

B. $$\frac{\partial y}{\sqrt{[-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)]}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}};$$
$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)}}; \quad M = \sqrt{(\alpha-\gamma)}.$$

I. Limites $-\infty \ldots\ldots \gamma$; $\quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{(\beta-y)(\gamma-y)}{(\beta-\gamma)(\alpha-y)}$.

II. Limites $\beta \ldots\ldots\ldots \alpha$; $\quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{(\beta-\gamma)(\alpha-y)}{(y-\beta)(y-\gamma)}$.

Modulum $\varkappa$ unitate minorem esse, in substitutionibus Tab. I. *B.* et Tab. II. *A.*, *B.* jam ipso intuitu liquet; valorem $\frac{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}}$ quoque unitate minorem esse ex forma, qua exhiberi potest, sequenti
$$\frac{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]}} = \frac{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]}}{\sqrt{[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)]}}$$
elucet.

In formulis propositis, transeunte y ab altero limite ad alterum x ab -1 ad $+1$ transit. —

Formulae, quae in Tabula I. *A.* exhibitae sunt, tum quoque substitutionem realem suggerunt, quum omnes quantitates α, β, γ, δ sunt imaginariae.

Ponatur nimirum, designantibus n, q quantitates positivas,
$\alpha = m+n\sqrt{-1}$; $\beta = m-n\sqrt{-1}$; $\gamma = p+q\sqrt{-1}$; $\delta = p-q\sqrt{-1}$; designantibus m, n, p et q quantitates reales; quo facto expressio proposita haecce erit
$$\frac{\partial y}{\sqrt{[((y-m)^2+n^2)((y-p)^2+q^2)]}}.$$
Substitutionis formulam, hunc ad casum spectantem, sine ullo negotio ex formula paulo ante laudata (Tab. I. *A.*) derivabis substituendo ipsarum

quantitatum α, β, γ, δ valores mutandoque $\varkappa$ in $\frac{1}{\varkappa}$ atque x in $\varkappa x$; quibus peractis erit, ubi simul loco $\frac{M}{\varkappa}$ ponis M:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[((y-m)^2+n^2)((y-p)^2+q^2)]}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}},$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{[(m-p)^2+(n-q)^2]}}{\sqrt{[(m-p)^2+(n+q)^2]}}; \qquad M = \sqrt{[m-p)^2+(n+q)^2]};$$

$$a. \quad \frac{1-\varkappa x}{1+\varkappa x} = \frac{n[(y-p)^2+q^2]}{q[(y-m)^2+n^2]}.$$

Inquiramus, quosnam valores x induat, dum argumentum y inde ab altero limite $-\infty$ ad alterum $+\infty$ transit. Valor ipsius x, hisce limitibus respondens, unus idemque est et quidem aequalis quantitati

$$\frac{q-n}{\varkappa(q+n)} = \frac{(q-n)\sqrt{[(m-p)^2+(n+q)^2]}}{(q+n)\sqrt{[(m-p)^2+(n-q)^2]}} = \frac{\sqrt{[(q-n)^2(m-p)^2+(q^2-n^2)^2]}}{\sqrt{[(q+n)^2(m-p)^2+(q^2-n^2)^2]}},$$

quae, ut e posteriore forma adparet, unitate absolute minor est.

Transeunte y ab $-\infty$ usque ad valorem

$$y = \frac{p^2+q^2-(m^2+n^2)-\sqrt{[((m-p)^2+(n-q))^2((m-p)^2+(n+q)^2)]}}{2(p-m)}$$

variabilis x a valore $\frac{q-n}{\varkappa(q+n)}$ ad maximum valorem $+1$ adsurgit; ex quo ad minimum decrescit, eumque attingit, facto

$$y = \frac{p^2+q^2-(m^2+n^2)+\sqrt{[((m-p)^2+(n-q)^2)((m-p)^2+(n+q)^2)]}}{2(p-m)}$$

ex quo minimo valore, crescente y ad $+\infty$, ad valorem primitivum redit. Ex antecedentibus igitur apparet, cum transeunte y a $-\infty$ ad $+\infty$ ipsam x intervallum inter -1 et $+1$ positum bis permeare videamus, esse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial y}{\sqrt{[((y-m)^2+n^2))((y-p)^2+q^2)]}} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{\partial x}{M\sqrt{[1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{[((m-p)^2+(n+q)^2)\cos^2\varphi+4nq\sin^2\varphi]}}.$$

Quibus absolutis, facile erit ostensu, unde pendeat prosper successus prioris, quod suprà commemoravimus, substitutionis irrationalis.

Resoluta enim aequatione $x = \frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2}$ obtinetur

$$y = \frac{P \pm \sqrt{R}}{Q}$$

designantibus P et Q functiones rationales ipsius x lineares, R autem

functionem secundi ordinis. Quo substituto valore expressio $\frac{\partial y}{\sqrt{[(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$ induit formam

$$A.\quad \frac{\left[\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R}\pm\left(\frac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]\partial x}{\sqrt{[R(P\pm\sqrt{R}-\alpha Q)(P\pm\sqrt{R}-\beta Q)(P\pm\sqrt{R}-\gamma Q)(P\pm\sqrt{R}-\delta Q)]}}$$

ex qua propter irrationales, ibi comprehensas functiones, a priori haud liquet, quamnam viam, ad solutionem problematis idoneam, ingredi debeamus. Adhibita autem una ex formulis substitutionis, quas supra dedimus, e. g. illa, quae limitibus β et γ respondet, statim ad liquidum perducitur res.

Valor variabilis y, ex formula commemorata fluens, hic est

$$y=\frac{x(\alpha\gamma-\beta\delta)-(\alpha\delta-\beta\gamma)\pm\sqrt{[(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)((\alpha-\gamma)(\beta-\delta)-(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)x^2)]}}{x(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-(\alpha-\beta)+\gamma-\delta}$$
$$=\frac{P\pm\sqrt{R}}{Q},$$

cujus ope nanciscimur aequationes, quae sequuntur, memorabiles:

$$B.\quad \left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R}\pm\left(\frac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$
$$=\pm(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)[x(\alpha-\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)-(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$
$$\mp(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\sqrt{R}],$$

$$C.\quad (y-\alpha)(y-\beta)$$
$$=\frac{(\alpha-\beta)}{Q^2}[x^2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+x(\alpha-\beta)((\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)+(\alpha-\delta)(\delta-\beta))$$
$$+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\pm(1-x)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\sqrt{R})$$
$$=\mp\frac{(1-x)}{(\gamma-\delta)Q^2}\left[\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R}\pm\left(\frac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right],$$

$$D.\quad (y-\gamma)(y-\delta)$$
$$=-\frac{(\gamma-\delta)}{Q^2}[x^2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)-x(\gamma-\delta)((\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)+(\beta-\gamma)(\beta-\delta))$$
$$-(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\mp(1+x)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\sqrt{R}]$$
$$=\mp\frac{1+x}{(\alpha-\beta)Q^2}\left[\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R}\pm\left(\frac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right],$$

sive ponendo loco y valorem $\frac{P\pm\sqrt{R}}{R}$

$$E.\quad (P\pm\sqrt{R}-\alpha Q)(P\pm\sqrt{R}-\beta Q)$$
$$=\mp\frac{(1-x)}{\gamma-\delta}\left[\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R}\pm\left(\frac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right],$$

$$(P \pm \sqrt{R} - \gamma Q)(P \pm \sqrt{R} - \delta Q)$$
$$= \mp \frac{(1+x)}{\alpha-\beta}\left[\left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\sqrt{R} \pm \left(\tfrac{1}{2}Q\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right],$$

ita ut quatuor ultimi factores denominatoris in expressione (A.) in duplex productum discerpi possunt, quorum utrumque aequat functionem, cujus alter factor est functio linearis ipsius variabilis quantitatis x, alter vero aequalis est numeratori expressionis (A.). Substitutis expressionibus (E.) in (A.), transformatio provenit,

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)-(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)x^2]}},$$

quae cum supra proposita convenit.

Regiomonti m. Oct. a. 1835.

15.

Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova.

(Auct. *Car. Ant. Bretschneider*, math. in Gymn. ill. Gothano praec. secundo.)

Ad difficiliora calculi integralis problemata theoria est referenda functionis illius, quae *logarithmus integralis* dicitur, in qua accuratius exstruenda jam plures analystae versati sunt. Imprimis huc referas nomina virorum cll. *Mascheroni, Soldner, Bessel, Buzengeiger* *), quorum diligentia atque sedulitas jam difficultates quasdam, easque non minimas, ab illa functione oblatas superavere. Tamen accuratior hujus rei disquisitio nullo modo superabundans censenda fuerit; nam non modo determinatio quantitatis constantis simplicior et rectior est constituenda, quam apud *Soldnerum* est **), sed formulae etiam gravissimae in hac theoria repertae vinculo et nexu, quo nunc omnino carent, angustiori inter se sunt jungendae. Huc accedit, quod si valorem functionis pro magnis valoribus variabilis x evolvere volueris, series adhuc inventae, adhibitis ipsis illis viri cl. *Bessel,* non satis convergere videntur. Quare hanc rem denuo tractabo atque ea, quae resultarunt, cum aliqua gaudeant utilitate, his quae sequuntur paragraphis proponam.

§. 1.

Denotato logarithmo integrali variabilis x per $\operatorname{li} x$, efficiuntur ex evolutione quantitatum $\frac{d.e^{\pm lx}}{\pm lx}$ et $\frac{\partial x}{l(1\pm x)}$ et ex integratione subsequente aequationes fundamentales:

$$1. \quad \operatorname{li} x^{\pm 1} = c + l(\pm lx) \pm \frac{lx}{1.1!} + \frac{(lx)^2}{2.2!} \pm \frac{(lx)^3}{3.3!} + \frac{(lx)^4}{4.4!} \pm \dots$$

$$2. \quad \operatorname{li}(1\pm x) = c + lx \pm \mathfrak{A}_1 x - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_2 x^2 \pm \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}_3 x^3 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}_4 x^4 \pm \dots$$

---

*) *Mascheroni* in s. adnotation. ad calculum integr. Euleri. — *Soldner* in théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante; à Munic, 1809. — *Bessel* in Königsberger Archiv für Mathem. und Naturwiss. ann. 1811, fasc. 1. — *Buzengeiger* in de Zach, Monatl. Corr. Vol. XXVI. pag. 285. — Disquisitiones a cl. Mascheroni institutas non cognovi nisi ex illis, quae cl. Bessel in disputatione sua citavit. Operis ipsius copia mihi non erat; investigatio autem constantis libri caput esse dicitur.

**) Conf. Hallische Litteraturzeitung. 1811. No. 104.

Si $x>1$, in aequatione (1.) signo superiori, si $x<1$, inferiori utaris. Quantitas c est constans integrationis utrique seriei communis; $n! = 1.2.3.4 \ldots (n-1)n$; denique coëfficientes seriei (2.) sunt:

$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{24} = 0{,}041666\ 666666\ 666666\ 666666\ 666666\ 666666\ 6\ldots$

$\frac{1}{3}\mathfrak{A}_3 = \frac{1}{72} = 0{,}013888\ 888888\ 888888\ 888888\ 888888\ 888888\ 8\ldots$

$\frac{1}{4}\mathfrak{A}_4 = \frac{19}{2880} = 0{,}006597\ 222222\ 222222\ 222222\ 222222\ 222222\ 2\ldots$

$\frac{1}{5}\mathfrak{A}_5 = \frac{3}{800} = 0{,}00375$

$\frac{1}{6}\mathfrak{A}_6 = \frac{863}{362880} = 0{,}002378\ 196649\ 029982\ 363315\ 696649\ 029982\ 3\ldots$

$\frac{1}{7}\mathfrak{A}_7 = \frac{275}{169344} = 0{,}001623\ 913454\ 270597\ 127739\ 984882\ 842025\ 6\ldots$

$\frac{1}{8}\mathfrak{A}_8 = \frac{33953}{29030400}$

$= 0{,}001169\ 567074\ 514991\ 181657\ 848324\ 514991\ 1\ldots$

$\frac{1}{9}\mathfrak{A}_9 = \frac{8183}{9331200}$

$= 0{,}000876\ 950445\ 816186\ 556927\ 297668\ 038408\ 7\ldots$

$\frac{1}{10}\mathfrak{A}_{10} = \frac{3250433}{4790016000}$

$= 0{,}000678\ 584998\ 463470\ 685692\ 907915\ 130137\ 3\ldots$

$\frac{1}{11}\mathfrak{A}_{11} = \frac{4671}{8673280}$

$= 0{,}000538\ 550582\ 939787\ 485242\ 030696\ 576151\ 1\ldots$

$\frac{1}{12}\mathfrak{A}_{12} = \frac{13695779093}{31384184832000}$

$= 0{,}000436\ 391104\ 829190\ 422223\ 931924\ 108290\ 9\ldots$

$\frac{1}{13}\mathfrak{A}_{13} = \frac{24466579093}{67999067136000}$

$= 0{,}000359\ 807569\ 772481\ 885831\ 499181\ 112530\ 7\ldots$

$\frac{1}{14}\mathfrak{A}_{14} = \frac{132282840127}{439378587648000}$

$= 0{,}000301\ 068017\ 071819\ 489777\ 413687\ 718550\ 4\ldots$

etc. etc.

Ad investigandam constantem, posito li $0 = 0$, fiat in aequatione (2.), adhibitis signis inferioribus, $x = 1$, quo prodit valor

$$3. \quad c = \mathfrak{A}_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}_3 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}_4 + \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}_5 + \ldots$$

ex quo videre licet, c inter valores 0,5 et 0,6 contineri. Porro cum sit

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{1.2}$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.2}\mathfrak{A}_1$$

$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{A}_3 = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.3}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2.3}\mathfrak{A}_2$$

$$\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}_4 = \frac{1}{4.5} - \frac{1}{4.4}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{3.4}\mathfrak{A}_2 - \frac{1}{2.4}\mathfrak{A}_3$$

etc. etc.

additis quae in linea verticali sese excipiunt membris, series efficitur:

$$4.\quad c - 1 = \mathfrak{A}_1\left(\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\ldots\right)-\mathfrak{A}_2\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots\right)$$
$$-\mathfrak{A}_3\left(\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\ldots\right)-\text{etc.}$$

quae citius convergit quam (3.) et, deficiente alia via, ad determinationem constantis c adhiberi possit. Quamquam non sufficit, ut valorem solum numericum constantis enuclees, sed necesse est, ut veram cognoscas hujus quantitatis indolem, quem finem modo in sequentibus proposito assequamur.

Constat enim esse

$$5.\quad \mathfrak{A}_p = (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-p+1)}{1.2.3.4\ldots p}\,\partial\nu$$
$$=\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\left(\frac{{}^p\mathfrak{F}_0}{p+1}-\frac{{}^p\mathfrak{F}_1}{p+2}+\frac{{}^p\mathfrak{F}_2}{p+3}-\frac{{}^p\mathfrak{F}_3}{p+4}+\ldots,\pm\frac{{}^p\mathfrak{F}_{p-2}}{3}\pm\frac{{}^p\mathfrak{F}_{p-1}}{2}\right)$$

(denotante ${}^p\mathfrak{F}_n$ coëfficientem $n$tum evolutionis facultatis $(1;+x)^p$, si p est numerus integer positivus). Quos valores si substituas in (2.), solutis parenthesibus et membris illis, quae eadem utuntur differentia $p-n$ indicum coëfficientis ${}^p\mathfrak{F}_n$, contractis, haec prodit aequatio:

$$\text{li}(1\pm x) = c + lx \pm \tfrac{1}{1}\left(\frac{{}^1\mathfrak{F}_0}{1}\cdot\frac{x}{1!}\mp\frac{{}^2\mathfrak{F}_1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{{}^3\mathfrak{F}_2}{3}\cdot\frac{x^3}{3!}\mp\frac{{}^4\mathfrak{F}_3}{4}\cdot\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{{}^2\mathfrak{F}_0}{2}\cdot\frac{x^2}{2!}\mp\frac{{}^3\mathfrak{F}_1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{{}^4\mathfrak{F}_2}{4}\cdot\frac{x^4}{4!}\mp\frac{{}^5\mathfrak{F}_3}{5}\cdot\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)$$
$$\pm\ \text{etc.}$$

Ad summandas series in parenthesibus inclusas habes, denotante ${}^a\mathfrak{B}_n$ coëfficientem binomialem $n$tum exponentis a,

$$\pm\frac{{}^a\mathfrak{B}_1 x}{1}+\frac{{}^a\mathfrak{B}_2 x^2}{2}\pm\frac{{}^a\mathfrak{B}_3 x^3}{3}+\ldots = \pm a\left(\frac{{}^1\mathfrak{F}_0}{1}\cdot\frac{x}{1!}\mp\frac{{}^2\mathfrak{F}_1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)$$
$$+a^2\left(\frac{{}^2\mathfrak{F}_0}{2}\cdot\frac{x^2}{1!}\mp\frac{{}^3\mathfrak{F}_1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$$
$$\pm\ \text{etc.}$$

Pars autem hujus aequationis ad sinistram scripta est aequalis quantitati

$$\int\frac{(1\pm x)^a-1}{x}\,\partial x = \int\frac{\partial x}{x}\left[\frac{a}{1!}l(1\pm x)+\frac{a^2}{2!}[l(\pm x)]^2+\frac{a^3}{3!}[l(1\pm x)]^3+\ldots\right),$$

quo efficitur

$$6.\quad (\pm 1)^n\left(\frac{{}^n\mathfrak{F}_0}{n}\cdot\frac{x^n}{n!}\mp\frac{{}^{n+1}\mathfrak{F}_1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{{}^{n+2}\mathfrak{F}_2}{n+2}\cdot\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\mp\ldots\right)$$
$$=\int\frac{[l(1\pm x)]^n}{n!}\cdot\frac{\partial x}{x},$$

ideoque

arbitrariae n ita est determinandus, ut sit $x^{\frac{1}{n}} < 2$, qua una tantum conditione series convergit. Si modicus variabilis x datur valor, computatio functionis $\mathrm{li}\,x$ satis commode efficitur; at magni argumenti x valores computum tam operosum reddunt, ut calculatoris quamvis indefessi sedulitatem repriment.

Alias etiam nanciscimur formulas discerptis ratione modo dicenda coëfficientibus $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ etc. Constat nimirum, coëfficientes ex evolutione quantitatis $\frac{1}{l(1\pm x)}$ progredientes ita quoque repraesentari posse, ut sit:

$$\mathfrak{A}_1 = \tfrac{1}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_2 = \frac{\beta_1 \cdot {}^1\mathfrak{F}_0}{2.2!},$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_3 = \frac{\beta_1 \cdot {}^2\mathfrak{F}_1}{2.3!},$$

$$\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}_4 = \frac{\beta_1 \cdot {}^3\mathfrak{F}_2}{2.4!} - \frac{\beta_2 \cdot {}^3\mathfrak{F}_0}{4.4!},$$

$$\tfrac{1}{5}\mathfrak{A}_5 = \frac{\beta_1 \cdot {}^4\mathfrak{F}_3}{2.5!} - \frac{\beta_2 \cdot {}^4\mathfrak{F}_1}{4.6!},$$

$$\tfrac{1}{6}\mathfrak{A}_6 = \frac{\beta_1 \cdot {}^5\mathfrak{F}_4}{2.6!} - \frac{\beta_2 \cdot {}^5\mathfrak{F}_2}{4.6!} + \frac{\beta_3 \cdot {}^5\mathfrak{F}_0}{6.6!},$$

$$\tfrac{1}{7}\mathfrak{A}_7 = \frac{\beta_1 \cdot {}^6\mathfrak{F}_5}{2.7!} - \frac{\beta_2 \cdot {}^6\mathfrak{F}_3}{4.7!} + \frac{\beta_3 \cdot {}^6\mathfrak{F}_1}{6.7!}$$

etc.,

ubi β_1, β_2, β_3 etc. numeros designant Bernouillianos. Quibus valoribus in serie (2.) substitutis nova prodit aequatio:

$$15.\quad \mathrm{li}(1\pm x) = \gamma + lx \pm \tfrac{1}{2}x - \frac{\beta_1}{2}\left(\frac{{}^1\mathfrak{F}_0}{2!}x^2 \mp \frac{{}^2\mathfrak{F}_1}{3!}x^3 + \frac{{}^3\mathfrak{F}_2}{4!}x^4 \mp \dots\right)$$
$$+ \frac{\beta_2}{4}\left(\frac{{}^3\mathfrak{F}_0}{4!}x^4 \mp \frac{{}^4\mathfrak{F}_1}{5!}x^5 + \frac{{}^5\mathfrak{F}_2}{6!}x^6 \mp \dots\right)$$
$$- \text{etc.},$$

in qua ut serierum ad dextram scriptarum summas faciamus est necesse. Quem ad finem commemoremus formulam illam notam

$$\frac{{}^a\mathfrak{B}_n}{n+1}x^{n+1}(\pm 1)^{n+1}$$
$$= (\pm 1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}({}^n\mathfrak{F}_0 \cdot a^n - {}^n\mathfrak{F}_1 \cdot a^{n-1} + - \dots \mp {}^n\mathfrak{F}_{n-2} \cdot a^2 \pm {}^n\mathfrak{F}_{n-1} \cdot a),$$

ex qua, posito n successive $= 1, 2, 3,$ etc. et additis qui inde proveniunt terminis, aequatio prodit:

$$16.\quad \frac{{}^a\mathfrak{B}_1}{2}x^2 \pm \frac{{}^a\mathfrak{B}_2}{3}x^3 + \frac{{}^a\mathfrak{B}_3}{4}x^4 \pm \dots = a\left(\frac{{}^1\mathfrak{F}_0}{2!}x^2 \mp \frac{{}^2\mathfrak{F}_1}{3!}x^3 + \frac{{}^3\mathfrak{F}_2}{4!}x^4 \mp \dots\right)$$
$$\pm a^2\left(\frac{{}^2\mathfrak{F}_0}{3!}x^3 \mp \frac{{}^3\mathfrak{F}_1}{4!}x^4 + \frac{{}^4\mathfrak{F}_2}{5!}x^5 \mp \dots\right)$$
$$+\text{ etc.},$$

cujus pars ad sinistram scripta formam quoque induit sequentem:

$$\frac{(1\pm x)^{a+1} - 1 \mp (a+1)x}{a+1}$$
$$= \mp x + \frac{l(1\pm x)}{1!} + (a+1)\frac{[l(1\pm x)]^2}{2!} + (a+1)^2\frac{[l(1\pm x)]^3}{3!} + \dots,$$

vel evolutione facta et posito $1\pm x = u$, in aequationem

$$\frac{u^{a+1} - 1 + (a+1)(1-u)}{a+1} = a\frac{(lu)^2}{1!}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{lu}{1!3} + \frac{(lu)^2}{2!4} + \frac{(lu)^3}{3!5} + \dots\right)$$
$$+ a^2\frac{(lu)^3}{2!}\left(\tfrac{1}{3} + \frac{lu}{1!4} + \frac{(lu)^2}{2!5} + \frac{(lu)^3}{3!6} + \dots\right)$$
$$+\text{ etc.}$$

abit. Brevitatis causa nunc designemus series modo evolutas symbolo G^{lu}, ita ut sit

$$17.\quad \frac{1}{n} \pm \frac{lu}{1!(n+1)} + \frac{(lu)^2}{2!(n+2)} \pm \frac{(lu)^3}{3!(n+3)} + \frac{(lu)^4}{4!(n+4)} \pm \dots = G_n^{\pm lu},$$

quo nanciscimur

$$18.\quad \frac{{}^n\mathfrak{F}_0}{(n+1)!}x^{n+1} \mp \frac{{}^{n+1}\mathfrak{F}_1}{(n+2)!}x^{n+2} + \frac{{}^{n+2}\mathfrak{F}_2}{(n+3)!}x^{n+3} \mp \dots$$
$$= (\pm 1)^{n+1}\frac{[l(1\pm x)]^{n+1}}{n!}G_{n+1}^{l(1\pm x)};$$

tunc ex aequatione (15.) descendit aequatio haec nova et memorabilis

$$19.\quad \mathrm{li}\,u = \gamma + l[\mp(1-u)] - \frac{1-u}{2} - \frac{\beta_1}{2}\cdot\frac{(lu)^2}{1!}G_2^{lu}$$
$$+ \frac{\beta^3}{4}\cdot\frac{(lu)^4}{3!}G_4^{lu} - \frac{\beta^5}{6}\cdot\frac{(lu)^6}{5!}G_6^{lu} + - \dots$$

in quo numeri Bernoulliani coëfficientes constituunt singulorum terminorum. Quae quidem evolutio subsidium adeo nobis suppeditat, quo constantis valorem alia prorsus et nova, quam qua supra usi sumus, methodo evolvamus. Habemus enim in aequatione (16.), adhibitis signis inferioribus et posito $x = 1$,

$$\frac{{}^a\mathfrak{B}_1}{2} - \frac{{}^a\mathfrak{B}_2}{3} + \frac{{}^a\mathfrak{B}_3}{4} - \frac{{}^a\mathfrak{B}_4}{5} + - \dots = \frac{a}{1+a} = a - a^2 + a^3 - a^4 + \dots,$$

ideoque

$$20.\quad 1 = \frac{{}^n\mathfrak{F}_0}{(n+1)!} + \frac{{}^{n+1}\mathfrak{F}_1}{(n+2)!} + \frac{{}^{n+2}\mathfrak{F}_2}{(n+3)!} + \frac{{}^{n+3}\mathfrak{F}_3}{(n+4)!} + \dots,$$

cujus ope ex formula (15.) valorem constantis

$$21. \quad c = \tfrac{1}{2} + \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{4} + \frac{\beta_3}{6} - \frac{\beta_4}{8} + \frac{\beta_5}{10} - + \ldots = \gamma$$

eruimus eundem, quem supra jam invenimus.

Coëfficientes symbolo G denotatos, quorum in tota hac theoria et maximus usus et maxima est utilitas, alias etiam per formas repraesentare licet memoratu dignas. Differentiata aequatione (17.) secundum lu accipimus:

$$\frac{\partial . G_n^{\pm lu}}{\partial(\pm lu)} = \frac{1}{n+1} \pm \frac{lu}{1!(n+2)} + \frac{(lu)^2}{2!(n+3)} \pm \frac{(lu)^3}{3!(n+4)} + \ldots = G_{n+1}^{\pm lu},$$

ex quo concludimus, coëfficientes G enucleari posse posteriorem nimirum quemque ex antecedenti sola adhibita differentiatione. Itaque cum sit $G_1^{\pm lu} = \frac{u^{\pm 1} - 1}{\pm lu}$, habemus etiam

$$22. \quad G_{n+1}^{\pm lu} = \frac{\partial^n \left(\frac{u^{\pm 1} - 1}{\pm lu}\right)}{\partial(\pm lu)^n}$$

sive, differentiatione perpetrata,

$$23. \quad G_{n+1}^{lu} = \frac{u[(lu)^n - n(lu)^{n-1} + n(n-1)(lu)^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 3.2 lu \pm n!] \mp n!}{(lu)^{n+1}},$$

$$24. \quad G_{n+1}^{-lu} = \frac{u^{-1}[(lu)^n + n(lu)^{n-1} + n(n-1)(lu)^{n-2} + \ldots + n(n-1)\ldots 3.2 lu + n!] - n!}{(-lu)^{n+1}},$$

quarum aequationum beneficio etiam licet, coëfficientes G per formulam hanc recurrentem

$$25. \quad G_{n+1}^{\pm lu} = \frac{n . G_n^{\pm lu} - u^{\pm 1}}{\mp lu}$$

inter se conjungere. Invenimus autem eadem via:

$$G_n^{\pm lu} = \frac{u^{\pm 1}}{n} + \frac{\mp lu}{n} G_{n+1}^{\pm u}, \qquad G_{n+1}^{\pm lu} = \frac{u^{\pm 1}}{n+1} + \frac{\mp lu}{n+1} G_{n+2}^{\pm lu} \text{ etc.}$$

qui valores, perpetua adhibita substitutione, cum residuum $\frac{(\mp lu)^\nu}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu-1)} G_{n+\nu}^{\pm lu}$ pro $\nu = \infty$ ad nihilum decrescat, novam praebent aequationem:

$$26. \quad G_n^{\pm lu} = \frac{u^{\pm 1}}{1}\left[\frac{1}{n} \mp \frac{lu}{n(n+1)} + \frac{(lu)^2}{n(n+1)(n+2)} \mp \frac{(lu)^3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right]$$
$$= u^{\pm 1} C_n^{\mp lu},$$

quae multo citius convergit, quam series in (17.) inventa, ideoque ad coëfficientium G seu C computum numericum magnopere praestat.

Alia quoque exstat nec non rectior via, qua eundem valorem (26.) assequi licet. Multiplicata enim serie (17.) per

$$u^{\mp 1} = e^{\mp lu} = 1 \mp \frac{lu}{1!} + \frac{(lu)^2}{2!} \mp \frac{(lu)^3}{3!} + \dots$$

efficitur si termini easdem quantitatis lu dignitates continentes conjunguntur,

$$27. \quad u^{\mp 1} G^{\pm lu} = \frac{1}{n} \mp lu \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1!(n+1)}\right)$$
$$+ (lu)^2 \left(\frac{1}{2!n} - \frac{1}{1!1!(n+1)} + \frac{1}{2!(n+2)}\right)$$
$$\mp (lu)^3 \left(\frac{1}{3!n} - \frac{1}{2!1!(n+1)} + \frac{1}{1!2!(n+2)} - \frac{1}{3!(n+3)}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Coëfficiens termini $(lu)^p$, nimirum

$$\left(\frac{1}{p!n} - \frac{1}{(p-1)!1!(n+1)} + \frac{1}{(p-2)!2!(n+2)} - \dots \pm \frac{1}{1!(p-1)!(n+p-1)} \mp \frac{1}{p!(n+p)}\right),$$

formam potest induere

$$\frac{1}{p!}\left[\frac{1}{n} - \frac{{}^p\mathfrak{B}_1}{n+1} + \frac{{}^p\mathfrak{B}_2}{n+2} - \frac{{}^p\mathfrak{B}_3}{n+3} + \dots \pm \frac{{}^p\mathfrak{B}_2}{n+p-2} \mp \frac{{}^p\mathfrak{B}_1}{n+p-1} \pm \frac{1}{n+p}\right] = \frac{1}{p!}(n.{}^{n+p}\mathfrak{B}_p)^{-1},$$

cujus ope, cum sit

$$\frac{1}{n.p!} \cdot \frac{1}{{}^{n+p}\mathfrak{B}_p} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)},$$

series (27.) extemplo in priorem (26.) transmutatur.

Denique, ut omnia ad coëfficientes G spectantia hic colligamus, nunc integrale hoc definitum

$$28. \quad G_{n+1}^{\pm lu} = \int_0^1 u^{\pm v} . v^n \partial v$$

commemoremus, quod rite evolutum omnes fere, quos adhuc invenimus, nobis praebet valores coëfficientis G.

§. 3.

Series adhuc repertae cum ad computum numericum functionis nostrae pro magnis argumenti x valoribus non admodum prosint, experiamur, an discerpando et transformando effici possit, ut citius convergant. Quem ad finem meminisse juvabit, esse

$$-l(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = X_0,$$

$$\frac{1}{1.1!} - \frac{1-x}{1.x} X_0 = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots = X_1,$$

$$\frac{1}{2.2!} - \frac{1-x}{2.x} X_1 = \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{2.3.4} + \frac{x^3}{3.4.5} + \frac{x^4}{4.5.6} + \dots = X_2,$$

etc. etc.

$$\frac{1}{n.n!} - \frac{1-x}{n.x} X_{n-1} = \frac{x}{1.2\dots(n+1)} + \frac{x^2}{2.3.4\dots(n+2)} + \frac{x^3}{3.4.5\dots(n+3)} + \dots = X_n,$$

unde posito $x=1$, cum sit $(1-1)\,l(1-1)=0$, descendunt valores

$$\frac{1}{1.1!}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\dots,$$
$$\frac{1}{2.2!}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{n.n!}=\frac{1}{1.2\dots(n+1)}+\frac{1}{2.3\dots(n+2)}+\frac{1}{3.4\dots(n+3)}+\dots,$$

qui in formula fundamentali (1.) substituti, singulis terminis rite dispositis et ratione habita aequationis (26.), novam efficiunt seriem

$$29.\quad \operatorname{li} x^{\pm 1}=\gamma+l(\pm lx)\pm lx\left[\tfrac{1}{1}C_2^{\pm lx}+\tfrac{1}{2}C_3^{\pm lx}+\tfrac{1}{3}C_4^{\pm lx}+\dots\right]$$
$$=\gamma+l(\pm lx)\pm lx.x^{\pm 1}\left[\tfrac{1}{1}G_2^{\mp lx}+\tfrac{1}{2}G_3^{\mp lx}+\tfrac{1}{3}G_4^{\mp lx}+\dots\right].$$

Itaque si valores coëfficientium C aliunde jam computatos habes, logarithmum integralem facillime computes; si non, valores illos e formula recurrenti (25.) commode evolvas, evolutosque in functionis computatione adhibeas. Crescente x seriei convergentia imminuitur, ita ut pro magnis argumenti valoribus computus nimis reddatur operosus, quo quidem casu alia necesse est utaris seriei (1.) transformatione. Retentis nimirum in formula fundamentali terminis omnibus, quorum valor unitatem superat, discerptionem supra doctam in illo demum seriei termino adhibeas, quod unitatis limitem haud attingit, unde aequationem novam:

$$30.\quad \operatorname{li} x^{\pm 1}=\gamma+l(\pm lx)\pm lx+\frac{(lx)^2}{2.2!}\pm\frac{(lx)^3}{3.3!}+\dots\pm\frac{(lx)^{n-1}}{(n-1)(n-1)!}$$
$$+(lx)^n\left[\frac{C_{n+1}^{\pm lx}}{1.2.3\dots n}+\frac{C_{n+2}^{\pm lx}}{2.3.4\dots(n+1)}+\frac{C_{n+3}^{\pm lx}}{3.4.5\dots(n+2)}+\dots\right]$$

accipias pro omni arbitrariae x valore satis convergentem.

Ultimo loco duarum quoque aequationum mentionem faciamus, quae logarithmum integralem per differentialia successiva exhibent, et quarum altera ex (29.) et (22.) statim invenitur:

$$31.\quad \operatorname{li} x^{\pm 1}$$
$$=\gamma+l(\pm lx)\pm x^{\pm 1}lx\left(\frac{\partial\left(\frac{x^{\mp 1}-1}{\mp lx}\right)}{\partial(\mp lx)}+\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2\left(\frac{x^{\mp 1}-1}{\mp lx}\right)}{\partial(\mp lx)^2}+\tfrac{1}{3}.\frac{\partial^3\left(\frac{x^{\mp 1}-1}{\mp lx}\right)}{\partial(\mp lx)^3}+\dots\right),$$

altera vero ex formula (19.) sequenti modo eruitur. Habes enim ex aequatione (23.) valores:

$$\frac{(lu)^2}{1!}G_2^{lu}=u\left(\frac{lu}{1!}-1\right)+1,\quad \frac{(lu)^4}{3!}G_4^{lu}=u\left(\frac{(lu)^3}{3!}-\frac{(lu)^2}{2!}+\frac{lu}{1!}-1\right)+1\ \text{etc.}$$

qui in (19.) substituti, adhibita aequatione (21.), formulam exhibent:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{li}\,u = l[\mp(1-u)] + u\Big\{\tfrac{1}{2} - \frac{\beta_1 . lu}{2.1!} + \frac{\beta_2 .(lu)^3}{4.3!} - \frac{\beta_3 .(lu)^5}{6.5!} + \dots \\ + \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2 .(lu)^2}{4.2!} + \frac{\beta_3 .(lu)^4}{6.4!} - \dots \\ + \frac{\beta_2 . lu}{4.1!} - \frac{\beta_3 .(lu)^3}{6.3!} + \dots \\ - \frac{\beta_2}{4} + \frac{\beta_3 (lu)^2}{6.2!} - \dots \\ \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Facillimo nunc intelligis negotio, serierum horizontalium inferiorem quamque esse differentiale superioris, ita ut dato valore supremae seriei tota aequatio satis sit determinata. Constat autem esse

$$\frac{e^u+1}{e^u-1} = \frac{2}{u}\left(1+\frac{\beta_1 u^2}{2!} - \frac{\beta_2 u^4}{4!} + \frac{\beta_3 u^6}{6!} - \frac{\beta_4 u^8}{8!} + \dots\right),$$

cujus ope seriei illius supremae summam invenimus aequalem $-\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{lu}\right)$, quod formulam nobis praebet gravissimam

$$32.\quad l(\mp 1 \pm u) - \mathrm{li}\,u$$
$$= u\left\{\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{lu}\right) - \frac{\partial\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{lu}\right)}{\partial(lu)} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{lu}\right)}{\partial(lu)^2} - + \dots\right\},$$

sive

$$33.\quad l[\pm(u-1)] - \mathrm{li}\,u$$
$$= u\left\{\frac{\partial[l(u-1)-\mathrm{li}\,u]}{u\,\partial lu} - \frac{\partial^2[l(u-1)-\mathrm{li}\,u]}{\partial(lu)^2} + \frac{\partial^3[l(u-1)-\mathrm{li}\,u]}{\partial(lu)^3} - + \dots\right\}.$$

§. 4.

Aliud idemque prorsus novum subsidium, quo adhibito termini seriei cujusdam magis convergant, theoria suppeditat fractionum continuarum, cujus alias quoque in analysi utilitas est atque usus. Ut $\mathrm{li}\,x$ fractione continua exhibeatur non nisi adhibita aequatione (12.) effici potest, cum numeratores et denominatores particulares ex seriebus (1.) et (2.) orientes tantopere sint impediti, ut lex qua utuntur reperiri vix possit. Itaque si data est series

$$fx = 1-(n+1)x+(n+1)(n+2)x^2-(n+1)(n+2)(n+3)x^3+\dots$$

in fractionem continuam transformanda, habes:

$$a. \quad fx = \cfrac{1}{1+\cfrac{(n+1)x}{1+\cfrac{1.x}{1+\cfrac{(n+2)x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{(n+3)x}{1+\cfrac{3x}{1}+\text{etc.}}}}}}}$$

Denotemus nunc singulos numeratores particulares suo ordine per $a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots.$ nec non denominatores fractionum approximatarum, successive evolutarum, per $M_0\, M_1\, M_2\, M_3 \ldots.$, nemo est qui dubitet, quin sit

$$fx = \frac{a_0}{M_0} - \frac{a_0 a_1}{M_0 M_1} + \frac{a_0 a_1 a_2}{M_1 M_2} - \frac{a_0 a_1 a_2 a_3}{M_2 M_3} + - \ldots.$$

Invenimus autem $M_p = a_p . M_{p-2} + M_{p-1}$, qua de causa, subtractis terminis seriei negativis ab antecedentibus positivis, nanciscimur

$$\frac{a_0 a_1 \ldots . a_{2p}}{M_{2p}} \left(\frac{M_{2p+1} - a_{2p+1} . M_{2p-1}}{M_{2p-1} M_{2p+1}} \right) = \frac{a_0 a_1 a_2 \ldots . a_{2p}}{M_{2p-1} . M_{2p+1}},$$

quod suo loco substitutum seriem supra evolutam exhibet sub forma sequenti

$$b. \quad fx = \frac{a_0}{M_1} + \frac{a_0 a_1 a_2}{M_1 M_3} + \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}{M_3 M_5} + \frac{a_0 a_1 \ldots . a_5 a_6}{M_5 M_7} + \ldots$$

Itaque cum quivis denominator $M_1 M_3 M_5 \ldots.$ hoc schemate universali

$$c. \quad M_{2p+1} =$$
$$1 + (p+1)\, {}^{n+p+1}\mathfrak{B}_1 x + (p+1)p\, {}^{n+p+1}\mathfrak{B}_2 x^2 + (p+1)p(p-1)\, {}^{n+p+1}\mathfrak{B}_3 x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (p+1)p(p-1) \ldots 2.1\, {}^{n+p+1}\mathfrak{B}_{p+1}\, x^{p+1}$$

contineatur, series nostra (*b.*) hanc induit formam:

$$d. \quad fx = \frac{1}{1+(n+1)x} + \frac{1(n+1)x^2}{[1+(n+1)x][1+2(n+2)x+(n+2)(n+1)x^2]}$$
$$+ \frac{1.2.(n+1)(n+2)x^4}{[1+2(n+2)x+(n+2)(n+1)x^2][1+3(n+3)x+3(n+3)(n+2)x^2+(n+3)(n+2)(n+1)x^3]}$$
$$+ \text{etc.}$$

ad computationem aptissimam. Et facile intelligitur, hanc seriem transformatam eo citius convergere, quo magis series supra proposita diverserit.

Jam vero licet, loco fractionis continuae (*a.*) in seriem transformandae valores enucleare fractionum approximatarum, quae functionem fx usque ad certum limitem satis exacte repraesentant. Verum enim vero cum fractiones approximatae ex (*a.*) evolutae nimis tarde convergant, praestat ut fractionem continuam (*a.*) in aliam transformemus, quae non nisi dimidiam terminorum partem contineat. Constat nimirum esse

$$e.\quad fx = 1 - \cfrac{(n+1)x}{1+(n+2)x - \cfrac{1(n+2)x^2}{1+(n+4)x} - \cfrac{2(n+3)x^2}{1+(n+6)x - \cfrac{3(n+4)x^2}{1+(n+8)x - \text{etc.,}}}}$$

quod nobis fractiones approximatas sequentes

$$f.\quad fx_1 = 1 - \frac{(n+1)x}{1+(n+2)x},\quad fx_2 = 1 - \frac{(n+1)x + 1(n+1)(n+2)x^2}{1+2(n+3)x+(n+3)(n+2)x^2},$$

$$fx_3 = 1 - \frac{(n+1)x + 2(n+1)(n+5)x^2 + [1(n+1)(n+5)(n+4) - 1(n+1)(n+2)]x^3}{1+3(n+4)x+3(n+4)(n+3)x^2+(n+4)(n+3)(n+2)x^3} \text{ etc.}$$

suppeditat, quarum schema universale

$$g.\quad fx_p =$$

$$1 - \frac{N_1^p x + N_2^p x^2 + N_3^p x^3 + \ldots + N_r^p x^r + \ldots + N_{p-1}^p x^{p-1} + N_p^p x^p}{1+p.\,^{n+p+1}\mathfrak{B}_1 x + p(p-1)\,^{n+p+1}\mathfrak{B}_2 x^2 + \ldots + p(p-1)\ldots 3.2\,^{n+p+1}\mathfrak{B}_{p-1} + p!\,^{n+p+1}\mathfrak{B}_p x^p}$$

invenitur. Numeratoris coëfficientes N_r^p ex illis numeratoris classis antecedentis $(p-1)$tae et $(p-2)$tae per formulas recurrentes derivantur

$$\begin{aligned}
N_1^p &= N_1^{p-1} = n+1,\\
N_2^p &= N_2^{p-1} + (n+2p)N_1^{p-1},\\
N_3^p &= N_3^{p-1} + (n+2p)N_2^{p-1} - (p-1)(n+p)N_1^{p-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_r^p &= N_r^{p-1} + (n+2p)N_{r-1}^{p-1} - (p-1)(n+p)N_{r-2}^{p-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_{p-1}^p &= N_{p-1}^{p-1} + (n+2p)N_{p-2}^{p-1} - (p-1)(n+p)N_{p-3}^{p-2},\\
N_p^p &= \qquad (n+2p)N_{p-1}^{p-1} - (p-1)(n+p)N_{p-2}^{p-2},
\end{aligned}$$

quae, substitutione rite perpetrata, aequationem nobis praebent:

$$\begin{aligned}
h.\quad N_r^p = {} & (r-1)!(n+1)\,^{p-1}\mathfrak{B}_{r-1}.\,^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-1} - (r-2)!(n+1)(n+2)\,^{p-2}\mathfrak{B}_{r-2}.\,^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-3}\\
& + (r-3)!(n+1)(n+2)(n+3)\,^{p-3}\mathfrak{B}_{r-3},\,^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-5} - + \ldots,
\end{aligned}$$

quae pro impari valore indicis r termino illo finitur, quod $^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-(r-1)}$ continet, pro pari autem indicis valore, termino per $^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-r}$ multiplicato. Facili negotio nunc demonstrari potest, aequationem ($h.$) pro N_r^p valentem etiam pro N_r^{p+1} et N_{r+1}^p valere, cui autem demonstrationi, cum nimis longa esset, supersedemus. Singulos nunc coëfficientium N valores, quia $0! = 1$ et $^x\mathfrak{B}_0 = 1$ invenitur, tabula sequenti exhibeamus tales:

p	$r=1$	$r=2$	$r=3$
1	$n+1$		
2	$n+1$	$1(n+1)^{n+4}\mathfrak{B}_1$	
3	$n+1$	$2(n+1)^{n+5}\mathfrak{B}_1$	$2.1(n+1)^{n+5}\mathfrak{B}_2-1(n+1)(n+2)$
4	$n+1$	$3(n+1)^{n+6}\mathfrak{B}_1$	$3.2(n+1)^{n+6}\mathfrak{B}_2-2(n+1)(n+2)$
5	$n+1$	$4(n+1)^{n+7}\mathfrak{B}_1$	$4.3(n+1)^{n+7}\mathfrak{B}_2-3(n+1)(n+2)$
6	$n+1$	$5(n+1)^{n+8}\mathfrak{B}_1$	$5.4(n+1)^{n+8}\mathfrak{B}_2-4(n+1)(n+2)$
7	$n+1$	$6(n+1)^{n+9}\mathfrak{B}_1$	$6.5(n+1)^{n+9}\mathfrak{B}_2-5(n+1)(n+2)$

p	$r=4$
4	$3.2.1(n+1)^{n+6}\mathfrak{B}_3-2.1(n+1)(n+2)^{n+6}\mathfrak{B}_1$
5	$4.3.2(n+1)^{n+7}\mathfrak{B}_3-3.2(n+1)(n+2)^{n+7}\mathfrak{B}_1$
6	$5.4.3(n+1)^{n+8}\mathfrak{B}_3-4.3(n+1)(n+2)^{n+8}\mathfrak{B}_1$
7	$6.5.4(n+1)^{n+9}\mathfrak{B}_3-5.4(n+1)(n+2)^{n+9}\mathfrak{B}_1$

p	$r=5$
5	$4.3.2.1(n+1)^{n+7}\mathfrak{B}_4-3.2.1(n+1)(n+2)^{n+7}\mathfrak{B}_2+2.1(n+1)(n+2)(n+3)$
6	$5.4.3.2(n+1)^{n+8}\mathfrak{B}_4-4.3.2(n+1)(n+2)^{n+8}\mathfrak{B}_2+3.2(n+1)(n+2)(n+3)$
7	$6.5.4.3(n+1)^{n+9}\mathfrak{B}_4-5.4.3(n+1)(n+2)^{n+9}\mathfrak{B}_2+4.3(n+1)(n+2)(n+3)$

etc. etc.

Denique, si denominatorem fractionis approximatae $p$tae in aequatione (g.) signo X_p denotes, ex formula recurrenti

$$X_p = X_{p-1}+(n+2p)xX_{p-1}-(p-1)(n+p)x^2X_{p-2}$$

facile demonstrabis, schema ibi relatum etiam pro X_{p+1} valere ideoque vim habere universalem; unde fit ut singulae quaeque fractiones approximatae functionis fx possint exhiberi.

§. 5.

Fractionem continuam (e.) ita etiam licet repraesentare, ut unitatem antecedentem in ipsas recipias fractiones approximatas. Quo facto eruimus

$$i.\quad \begin{cases} fx_1 = \dfrac{1+1!x}{1+(n+2)x}, \quad fx_2 = \dfrac{1+(1!+n+4)x+2!x^2}{1+2(n+3)+(n+3)(n+2)x^2}, \\ fx_3 = \dfrac{1+(1!+2(n+5))x+(2!+1(n+5)(n+4)+1.4)x^2+3!x^3}{1+3(n+4)x+3(n+4)(n+3)x^2+(n+4)(n+3)(n+2)} \text{ etc.,} \end{cases}$$

seu schema universale:

$$k.\quad fx_p = \frac{'N_0^p+'N_1^px+'N_2^px^2+\ldots+'N_r^px^r+\ldots+'N_{p-1}^px^{p-1}+'N_p^px^p}{1+p^{n+p+1}\mathfrak{B}_1x+p(p-1)^{n+p+1}\mathfrak{B}_2x^2+\ldots+p(p-1)\ldots3.2^{n+p+1}\mathfrak{B}_{p-1}x^{p-1}+p!^{n+p+1}\mathfrak{B}_px^p},$$

cujus denominatorem eundem, quem supra in ($g.$) invenimus. Numeratoris vero coëfficientes $'N$ ex formulis recurrentibus evolvimus sequentes

$$
\begin{aligned}
'N_0^p &= 1,\\
'N_1^p &= {}'N_1^{p-1} + (n+2p)\,'N_0^{p-1},\\
'N_2^p &= {}'N_2^{p-1} + (n+2p)\,'N_1^{p-1} - (p-1)(n+p)\,'N_0^{p-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
'N_r^p &= {}'N_r^{p-1} + (n+2p)\,'N_{r-1}^{p-1} - (p-1)(n+p)\,'N_{r-2}^{p-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
'N_{p-1}^p &= {}'N_{p-1}^{p-1} + (n+2p)\,'N_{p-2}^{p-1} - (p-1)(n+p)\,'N_{p-3}^{p-2},\\
'N_p^p &= \qquad\qquad (n+2p)\,'N_{p-1}^{p-1} - (p-1)(n+p)\,'N_{p-2}^{p-2},
\end{aligned}
$$

qui valores sibi rite substituti schema nobis praebent hoc universale:

$$
\begin{aligned}
l.\quad 'N_r^p = r! &+ (r-1)!(p-r)\,[{}^{n+p+r+1}\mathfrak{B}_1 - {}^{n+r}\mathfrak{B}_1]\\
&+ (r-2)!(p-r)(p-r+1)\,[{}^{n+p+r}\mathfrak{B}_2 - {}^{n+p+r-1}\mathfrak{B}_1\,{}^{n+r-1}\mathfrak{B}_1 + {}^{n+p-1}\mathfrak{B}_2]\\
&+ (r-3)!(p-r)(p-r+1)(p-r+2)\,[{}^{n+p+r-1}\mathfrak{B}_3 - {}^{n+p+r-2}\mathfrak{B}_2.{}^{n+r-2}\mathfrak{B}_1\\
&\qquad + {}^{n+p+r-3}\mathfrak{B}_1\,{}^{n+r-2}\mathfrak{B}_2 - {}^{n+r-2}\mathfrak{B}_3] + \dots\\
&\dots + (r-(r-1))!(p-r)(p-r+1)\dots(p-r+(r-1))\,[{}^{n+p+3}\mathfrak{B}_{r-1} - {}^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-2}.{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]\\
&+ (p-r)(p-r+1)\dots(p-1)p\,{}^{n+p+2}\mathfrak{B}_r.
\end{aligned}
$$

Quantitates uncis [] inclusae, quae forma communi

$$
m.\quad {}^a\mathfrak{B}_u - {}^{a-1}\mathfrak{B}_{u-1}.{}^b\mathfrak{B}_1 + {}^{a-2}\mathfrak{B}_{u-2}.{}^b\mathfrak{B}_2 - \dots \pm {}^{a-v}\mathfrak{B}_{u-v}.{}^b\mathfrak{B}_v \mp \dots \pm {}^{a-u+1}\mathfrak{B}_1.{}^b\mathfrak{B}_{u-1} \mp {}^b\mathfrak{B}_u
$$

utuntur, ita sunt definiendae, ut omnes termini, in quibus $u+v>r$, tollantur nec non ii solummodo retineantur, in quibus indicum u et v summa indicem r non superat. Demonstrationem formulae ($l.$) pro casu, quo $p+1$ et $r+1$ loco p et r positum est, facile quidem perpetrares; sed cum sit longior hoc loco eam omisimus. Expressionem ($m.$) cum constet esse aequalem ${}^{a-b}\mathfrak{B}_u$, aequationem ($l.$) paullo licet contrahere. Substituto enim valore ${}^{a-b}\mathfrak{B}_u$ pro omnibus terminis, qui schema ($m.$) integrum exhibent, proficiscuntur: pro valore indicis r pari aequatio

$$
\begin{aligned}
n.\quad 'N_r^p = r! &+ (r-1)!(p-r)\,{}^{p+1}\mathfrak{B}_1 + (r-2)!(p-r)(p-r+1)\,{}^{p+1}\mathfrak{B}_2\\
&+ (r-3)!(p-r)(p-r+1)(p-r+2)\,{}^{p+1}\mathfrak{B}_3 + \dots\\
&\dots + (r-\tfrac{1}{2}r)!(p-r)(p-r+1)\dots(p-r+\tfrac{1}{2}r-1)\,{}^{p+1}\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}r}\\
&+ (\tfrac{1}{2}r-1)!(p-r)(p-r+1)\dots(p-\tfrac{1}{2}r-1)(p-\tfrac{1}{2}r)\left[{}^{n+p+\frac{r}{2}+1}\mathfrak{B}_{\frac{r}{2}+1} - {}^{n+p+\frac{1}{2}r}\mathfrak{B}_{\frac{r}{2}}.{}^{n+\frac{1}{2}r}\mathfrak{B}_1 + \dots\right]\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

pro valore autem indicis r impari aequatio

$$o.\quad {}'N_r^p = r! + (r-1)!\,(p-r)^{p+1}\mathfrak{B}_1 + (r-2)!\,(p-r)(p-r+1)^{p+1}\mathfrak{B}_2$$
$$+ (r-3)!\,(p-r)(p-r+1)(p-r+2)^{p+1}\mathfrak{B}_3 + \ldots,$$
$$\ldots + (r-\tfrac{1}{2}(r-1))!\,(p-r)(p-r+1)\ldots\ldots(p-r+\tfrac{1}{2}(r-3))^{p+1}\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(r-1)}$$
$$+ (r-\tfrac{1}{2}(r+1))!\,(p-r)(p-r+1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(p-r+\tfrac{1}{2}(r-1))\left[{}^{n+p+\frac{1}{2}(r+3)}\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(r+1)} - {}^{n+p+\frac{1}{2}(r+1)}\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(r-1)}\,.\,{}^{n+\frac{1}{2}(r+1)}\mathfrak{B}_1 + - + \ldots\right]$$
$$+ \text{etc.}$$

Coëfficientes $'N$ cum eosdem inveniamus, si in aequatione (*g.*) fractionem ad dextram scriptam de unitate detrahimus, habemus etiam

$$p(p-1)\ldots\ldots(p-r+1)\,{}^{n+p+1}\mathfrak{B}_r\,x^r - N_r^p\,x^r = {}'N_r^p\,x^r,$$

ideoque

$$p.\quad p(p-1)\ldots\ldots(p-r+1)\,{}^{n+p+1}\mathfrak{B}_r - (r-1)!\,(n+1)\,{}^{p-1}\mathfrak{B}_{r-1}\,.\,{}^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-1}$$
$$+ (r-2)!\,(n+1)(n+2)\,{}^{p-2}\mathfrak{B}_{r-2}\,.\,{}^{n+p+2}\mathfrak{B}_{r-3} + \ldots = {}'N_r^p,$$

quod adhibita aequatione (*l.*) relationes nobis praebet inter coëfficientes binomiales admodum memorabiles, quas hoc autem loco omitti necesse est. Primos nunc valores coëfficientis $'N_r^p$ tabula sequenti ante oculos ponamus:

p	$r=0$	$r=1$	$r=2$
1	1	$1!$	
2	1	$1!+1.\,{}^{n+4}\mathfrak{B}_1$	$2!$
3	1	$1!+2.\,{}^{n+5}\mathfrak{B}_1$	$2!+1.\,{}^{4}\mathfrak{B}_1+1.2.\,{}^{n+5}\mathfrak{B}_2$
4	1	$1!+3.\,{}^{n+6}\mathfrak{B}_1$	$2!+2.\,{}^{5}\mathfrak{B}_1+2.3.\,{}^{n+6}\mathfrak{B}_2$
5	1	$1!+4.\,{}^{n+7}\mathfrak{B}_1$	$2!+3.\,{}^{6}\mathfrak{B}_1+3.4.\,{}^{n+7}\mathfrak{B}_2$
6	1	$1!+5.\,{}^{n+8}\mathfrak{B}_1$	$2!+4.\,{}^{7}\mathfrak{B}_1+4.5.\,{}^{n+8}\mathfrak{B}_2$

p	$r=3$
3	$3!$
4	$3!+2!1.\,{}^{5}\mathfrak{B}_1+1!1.2\,[{}^{n+7}\mathfrak{B}_2-{}^{n+6}\mathfrak{B}_1.\,{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]+1.2.3.\,{}^{n+6}\mathfrak{B}_3$
5	$3!+2!2.\,{}^{6}\mathfrak{B}_1+1!2.3\,[{}^{n+8}\mathfrak{B}_2-{}^{n+7}\mathfrak{B}_1.\,{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]+2.3.4.\,{}^{n+7}\mathfrak{B}_3$
6	$3!+2!3.\,{}^{7}\mathfrak{B}_1+1!3.4\,[{}^{n+9}\mathfrak{B}_2-{}^{n+8}\mathfrak{B}_1.\,{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]+3.4.5.\,{}^{n+8}\mathfrak{B}_3$

p	$r=4$
4	$4!$
5	$4!+3!1\,{}^{6}\mathfrak{B}_1+2!1.2.\,{}^{6}\mathfrak{B}_1+1!1.2.3\,[{}^{n+8}\mathfrak{B}_3-{}^{n+7}\mathfrak{B}_2.\,{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]+1.2.3.4.\,{}^{n+7}\mathfrak{B}_4$
6	$4!+3!2\,{}^{7}\mathfrak{B}_1+3!2.3.\,{}^{7}\mathfrak{B}_1+1!2.3.4\,[{}^{n+9}\mathfrak{B}_3-{}^{n+8}\mathfrak{B}_3.\,{}^{n+2}\mathfrak{B}_1]+2.3.4.5.\,{}^{n+8}\mathfrak{B}_4$

etc. etc.

§. 6.

Jam restat ut fractioni continuae (*c.*) in productum infinitae multitudinis factorum studeamus transformandae. Habemus autem secundum virum cl. *Stern*, si fractionem aequationis (*g.*) solam per $'fx_p$ denotamus,

$$1-fx = {'fx_1}.\frac{'fx_2}{'fx_1}.\frac{'fx_3}{'fx_2}.\frac{'fx_4}{'fx_3}\cdots\frac{'fx_p}{'fx_{p-1}}\cdots$$

quare id agamus necesse est, ut expressionem universalem factoris $p$ti $\frac{'fx_p}{'fx_{p-1}}$ enucleemus. Quem ad finem ponamus $'fx_p = \frac{V_p}{X_p}$, et singulos fractionis continuae (*e.*) numeratores et denominatores particulares $= a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ et resp. $b_1\, b_2\, b_3 \ldots$, quo facto habemus

$$q.\quad \frac{V_p}{X_p} = \frac{V_{p-1}\,b_p - V_{p-2}\,a_p}{X_{p-1}\,b_p - X_{p-2}\,a_p}\ \text{nec non}$$

$$\frac{'fx_p}{'fx_{p-1}} = \frac{X_{p-1}\,V_p}{V_{p-1}\,X_p} = \frac{X_{p-1}\,V_{p-1}\,b_p - X_{p-1}\,V_{p-2}\,a_p}{X_{p-1}\,V_{p-1}\,b_p - X_{p-2}\,V_{p-1}\,a_p}.$$

Valorem autem numeratoris $X_{p-1}\,V_{p-1}\,b_p - X_{p-1}\,V_{p-2}\,a_p$ ita quoque repraesentare licet, ut sit:

$$X_{p-1}\,V_{p-1}\,b_p - X_{p-2}\,V_{p-1}\,a_p - (X_{p-1}\,V_{p-2} - X_{p-2}\,V_{p-1})\,a_p,$$

unde, cum constet esse $-(X_{p-1}\,V_{p-2} - X_{p-2}\,V_{p-1}) = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}$, expressionem numeratoris illius deducimus sequentem

$$V_{p-1}\,X_p + a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{p-1}.a_p,$$

ex qua valor fractionis admodum elegans

$$r.\quad \frac{'fx_p}{'fx_{p-1}} = \frac{V_{p-1}\,X_p + a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p}{V_{p-1}\,X_p} = 1 + \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p}{V_{p-1}\,X_p}$$

descendit. Substitutione igitur perpetrata valoris $'fx_p$ in (*g.*) propositi, producti infiniti schema resultat sequens:

$$s.\quad fx = 1 - \frac{(n+1)x}{1+(n+2)x}\left[1 + \frac{1.(n+1)(n+2)x^2}{N_1^1[1+2(n+3)x+(n+3)(n+2)x^2]}\right]$$

$$\times\left[1 + \frac{1.2(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{[N_1^2+N_2^2x][1+3(n+4)x+3(n+4)(n+3)x^2+(n+4)(n+3)(n+2)x^3]}\right]$$

$$\times\left[1 + \frac{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^6}{[N_1^3+N_2^3x+N_3^3x^2] \times [1+4(n+5)x+6(n+5)(n+4)x^2+4(n+5)(n+4)(n+3)x^3+(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)x^4]}\right]$$

$$\times \text{ etc.},$$

cujus factores celerrime ad limitem 1 convergunt. Pari modo si valorem functionis fx_p in aequatione (*k.*) propositum adhibemus, aliud hoc nanciscimur producti infiniti schema:

$$t\quad fx = \left[1-\frac{(n+1)x}{1+(n+2)x}\right]\left[1-\frac{1!(n+1)(n+2)x^3}{['N_0^1+'N_1^1x][1+2(n+3)x+(n+3)(n+2)x^2]}\right]$$
$$\times\left[1-\frac{2!(n+1)(n+2)(n+3)x^5}{['N_0^2+'N_1^2x+'N_2^2x^2][1+3(n+4)x+3(n+4)(n+3)x^2+(n+4)(n+3)(n+2)x^3]}\right]$$
$\times$ etc.

Posito numeratore in aequatione ($k.$) $='V_p$ atque aequatione ($s.$) per ($t.$) divisa, proficiscitur:

$$\frac{1}{fx}-1 = \frac{'V_1}{'V_1}\,\frac{V_2.'V_1}{V\;.'V_2}.\frac{V_3.'V_2}{V_2.'V_3}\cdots\frac{V_p.'V_{p-1}}{V_{p-1}.'V_p}\cdots$$

Porro, cum sit $'V_p = X_p - V_p$, habemus,

$$\frac{V_p.'V_{p-1}}{V_{p-1}.'V_p} = \frac{V_pX_{p-1}-V_pV_{p-1}}{V_{p-1}X_p-V_pV_{p-1}}$$
$$= \frac{V_{p-1}X_p-V_pV_{p-1}+(p-1)!(n+1)(n+2)\ldots(n+p)x^{2p-1}}{V_{p-1}X_p-V_pV_{p-1}}$$
$$= 1+\frac{(p-1)!(n+1)(n+2)\ldots(n+p)x^{2p-1}}{'V_p.V_{p-1}},$$

unde accipimus:

$$u.\quad \frac{1}{fx} = 1+\frac{(n+1)x}{'V_1}.\left(1+\frac{1!(n+1)(n+2)x^3}{V_1.'V_2}\right)\left(1+\frac{2!(n+1)(n+2)(n+3)x^5}{V_2.'V_3}\right)\cdots$$

Simili modo divisione inverse, nimirum ($t.$) per ($s.$) perpetrata, ad productum pervenimus hoc:

$$v.\quad \frac{1}{1-fx} = 1-\frac{1+x}{V_1}\left(1-\frac{1!(n+1)(n+2)x^3}{V_2.'V_1}\right)\left(1-\frac{2!(n+1)(n+2)(n+3)x^5}{V_3.'V_2}\right)\cdots,$$

quas tamen evolutiones, cum rei nostrae alienae videantur, hoc loco omisimus.

§. 7.

Jam relabamur ad logarithmos integrales, quos posito $n=0$ atque $x=(lx)^{-1}$ invenimus $\text{li}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x.lx}.fx$, ideoque

$$34.\quad \text{li}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\left[\cfrac{1}{2x+\cfrac{lx}{lx+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{lx+\cfrac{2}{1+\ldots}}}}}\right] = -\frac{1}{x.lx}\left[1-\cfrac{1}{2+lx-\cfrac{1.2}{4+lx-\cfrac{2.3}{6+lx-\cfrac{3.4}{8+lx-\ldots}}}}\right],$$

$$35.\quad \text{li}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\left[\frac{1}{lx+1}+\frac{1!1!}{[lx+1][(lx)^2+4lx+2]}\right.$$
$$\left.+\frac{2!2!}{[(lx)^2+4lx+2][(lx)^3+9(lx)^2+18lx+6]}+\ldots\right].$$

Fractiones approximatas nunc habemus sequentes:

$$
36.\quad \begin{cases}
-\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{1}{lx+2}\right) = -\frac{1}{x.lx}\cdot\frac{lx+1}{lx+2}, \\[2ex]
-\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{lx+4}{(lx)^2+6lx+6}\right) = -\frac{1}{x.lx}\cdot\frac{(lx)^2+5lx+2}{(lx)^2+6lx+6}, \\[2ex]
-\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{(lx)^2+10lx+18}{(lx)^3+12(lx)^2+36lx+24}\right) \\
\qquad\qquad = -\frac{1}{x.lx}\cdot\frac{(lx)^3+11(lx)^2+26lx+6}{(lx)^3+12(lx)^2+36lx+24}, \\[2ex]
-\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{(lx)^3+18(lx)^2+86lx+96}{(lx)^4+20(lx)^3+120(lx)^2+240lx+120}\right) \\
\qquad\qquad = -\frac{1}{x.lx}\cdot\frac{(lx)^4+19(lx)^3+102(lx)^2+154lx+24}{(lx)^4+20(lx)^3+120(lx)^2+240lx+120}, \\[2ex]
-\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{(lx)^4+28(lx)^3+246(lx)^2+756lx+600}{(lx)^5+30(lx)^4+300(lx)^3+1200(lx)^2+1800lx+720}\right) \\
\qquad\qquad = -\frac{1}{x.lx}\cdot\frac{(lx)^5+29(lx)^4+272(lx)^3+954(lx)^2+1044lx+120}{(lx)^5+30(lx)^4+300(lx)^3+1200(lx)^2+1800lx+720}, \\[2ex]
\text{etc.}
\end{cases}
$$

Denique nanciscimur producta infinita

$$
\begin{aligned}
37.\quad \mathrm{li}\frac{1}{x} &= -\frac{1}{x.lx}+\frac{1}{x.lx}\left(\frac{1}{lx+2}\right)\left(1+\frac{1!2!}{(lx)^2+6lx+6}\right) \\
&\quad\times\left(1+\frac{2!3!}{[lx+4][(lx)^3+12(lx)^2+36lx+24]}\right)\dots, \\
&= -\frac{1}{x.lx}\left(1-\frac{1}{lx+2}\right)\left(\frac{1!2!}{[lx+1][(lx)^2+6lx+6]}\right) \\
&\quad\times\left(1-\frac{2!3!}{[(lx)^2+5lx+2][(lx)^3+12(lx)^2+36lx+24]}\right)\dots.
\end{aligned}
$$

Quibus omnibus aequationibus ad li $\frac{1}{x}$ computationem satis commode utaris, si argumenti x valor admodum accreverit. Sed hanc ipsam formularum concinnitatem valde augere licet, ubi retentis omnibus seriei (12.) terminis, qui unitatem non superant, transformationem in antecedenti §pho doctam illis tantum terminis adhibueris, qui seriem reddunt divergentem. Quo facto evenit exempli gratia:

$$
\begin{aligned}
38.\quad \mathrm{li}\frac{1}{x} &= -\frac{1}{x.lx}\left[1-\frac{1!}{lx}+\frac{2!}{(lx)^2}-\frac{3!}{(lx)^3}+-\dots\pm\frac{(n-1)!}{(lx)^{n-1}}\right] \\
&\pm\frac{n!}{x(lx)^n}\left[\frac{1}{lx+(n+1)}+\frac{1!(n+1)}{[lx+(n+1)][(lx^2)+2(n+2)lx+(n+2)(n+1)]}+\dots\right] \\
&= -\frac{1}{x.lx}\left[1-\frac{1!}{lx}+\frac{2!}{(lx)^2}-\frac{3!}{(lx)^3}+-\dots\pm\frac{(n-1)!}{(lx)^{n-1}}\right]\pm\frac{n!}{x(lx)^{n+1}}\cdot\frac{'Y,}{X.} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

36.

Facili negotio in his aequationibus pro quove variabilis x valore quantitatem n ita determinabis, ut minimum solummodo numerum dignitatum lx computandum habeas, qui logarithmi integralis valorem satis exactum praebeat.

§. 8.

Aequationes adhuc enucleatae quamvis aperte sint utilissimae, eo tamen incommodo laborant, quod singulorum numerorum logarithmi integrales singuli sunt computandi. Pro valoribus vero argumenti non magno discrimine diversis multo minor computationis erit labor, si logarithmum integralem alium ex alio componere vel si valorem $\text{li}(a+x)$ ex valore $\text{li}\,a$ derivare licet; cui rei constituendae haece inserviunt disquisitiones.

Si quae functio argumenti $a+x$ secundum dignitates functionis alius cujusdam argumenti x, quae tamen pro $x=0$ necesse est et ipsa evanescat, debet evolvi, optime theorema *Soldneri* elegantissimum adhibendum erit. Habes enim:

$$39.\quad F(a+x) = Fa + \frac{u}{1}A' + \frac{u^2}{2!}A'' + \frac{u^3}{3!}A''' + \dots,$$

qua in aequatione u functionem quamcunque argumenti x et formae $f(a+x)-fa$ indicat, coëfficientes vero A valores induunt hos

$$A' = \frac{\partial . Fa}{\partial . fa},\quad A'' = \frac{\partial . A'}{\partial . fa},\quad A''' = \frac{\partial . A''}{\partial . fa}\ \text{etc.}$$

Quo in theoremate adhibendo id praecipue agendum est, ut functio u eligatur talis, ut coëfficientes A quam simplicissimi prodeant. Quod facillime ita effici posse videtur, ut $u = a+x-a = $ ponatur, quo facto theorema nostrum ad notum illud Taylorianum reducitur, nimirum posito $Fa = \text{li}\,a$,

$$40.\quad \text{li}(a+x) = \text{li}\,a + \frac{x}{1}\cdot\frac{1}{la} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial\frac{1}{la}}{\partial a} + \frac{x^3}{3!}\cdot\frac{\partial^2\frac{1}{la}}{\partial a^2} + \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{\partial^3\frac{1}{la}}{\partial a^3} + \dots.$$

Jam vero habes

$$41.\quad \frac{\partial^n\frac{1}{la}}{\partial a^n} = (-1)^n\cdot\frac{1}{a^n}\Big[\frac{n!\,{}^n\mathfrak{F}_0}{(la)^{n+1}} + \frac{(n-1)!\,{}^n\mathfrak{F}_1}{(la)^n} + \frac{(n-2)!\,{}^n\mathfrak{F}_2}{(la)^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{2!\,{}^n\mathfrak{F}_{n-2}}{(la)^3} + \frac{1!\,{}^n\mathfrak{F}_{n-1}}{(la)^2}\Big],$$

quem valorem si in (40.) substituas, solutis parenthesibus terminisque illis, qui easdem dignitates quantitatis la continent, in unum collectis, accipis

$$\mathrm{li}(a+x) = \mathrm{li}\,a + \frac{x}{la} - \frac{1!\,a}{(la)^2}\left({}^1\mathfrak{F}_0 . \frac{x^2}{2!\,a^2} - \frac{{}^2\mathfrak{F}_1}{3!} . \frac{x^3}{a^3} + \frac{{}^3\mathfrak{F}_2}{4!} . \frac{x^4}{a^4} - + \ldots\right)$$
$$+ \frac{2!\,a}{(la)^3}\left(\frac{{}^2\mathfrak{F}_0}{3!} . \frac{x^3}{a^3} - \frac{{}^3\mathfrak{F}_1}{4!} . \frac{x^4}{a^4} + \frac{{}^4\mathfrak{F}_2}{5!} . \frac{x^5}{a^5} - + \ldots\right)$$
$$- \text{etc.}$$

et si pro seriebus in parenthesi inclusis earum valores ex aequatione (18.) substituas et brevitatis causa $1 + \frac{x}{a} = u$ ponas,

$$42.\quad \mathrm{li}(a+x) = \mathrm{li}\,au = \mathrm{li}\,a + au\left[\frac{lu}{la} C_1^{-lu} - \left(\frac{lu}{la}\right)^2 C_2^{-lu} + \left(\frac{lu}{la}\right)^3 C_3^{-lu} - + \ldots\right]$$

quae quidem series pro magnis valoribus quantitatis a cito convergit, et dummodo coëfficientes $(lu)^n C_n^{-lu}$ computaveris, facili negotio omni a adhiberi poterit. Tamen hanc seriem, cum sit maxima ad computandos logarithmos int. argumenti au utilitate, non sine magno labore ad computandos functionis valores pro numeris illis, qui a proxime insequuntur, adhibueris quoniam, mutato x seu u, omnes quoque coëfficientes $(lu)^n C_n^{-lu}$ denuo essent computandi. Aequatio (40.) huic rei efficiendae optime inserviret, cum ejus coëfficientes unius quantitatis a sint functiones; sed coëfficientes ipsi tardius comminuuntur ita ut via ulla gauderes sublevatione. Cujus rei importunitati ut mederetur vir cl. *Buzengeiger* hoc theorema integrale

$$43.\quad \int f(a+x)\partial x =$$
$$\int fa.\partial a + x[(1+q'+q''+\ldots+q^{\varkappa})fa - q'f(a+p'x) - q''f(a+p''x) - \ldots - q^{\varkappa}f(a+p^{\varkappa}x)]$$
$$+ \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} . \frac{\partial^{n+1} fa}{\partial a^{n+1}}\left(\frac{1}{n+2} + q'.p'^{n+1} + q''.p''^{n+1} + q'''.p'''^{n+1} + \ldots + q^{\varkappa}.p^{\varkappa\,n+1}\right)$$
$$+ \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} . \frac{\partial^{n+2} fa}{\partial a^{n+2}}\left(\frac{1}{n+3} + q'.p'^{n+2} + q''.p''^{n+2} + q'''.p'''^{n+2} + \ldots + q^{\varkappa}.p^{\varkappa\,n+2}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

proposuit, in quo quantitates $p', p'', \ldots p^{\varkappa}$ prorsus ex arbitrio, quantitates autem $q', q'', \ldots, q^{\varkappa}$ ex illis ita definiuntur, ut n primi seriei terminorum evanescant. Prodeunt igitur, si combinationes $w$tae classis ex ν elementis, nulla permissa elementorum repetitione, significes per ${}^{\nu}\mathfrak{C}_w$, aequationes sequentes.

$$q' = -\frac{\frac{1}{2}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{3}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \frac{1}{4}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-3} - \dots \pm \frac{1}{n+1}}{p'(p^{n}-p')(p^{n-1}-p)\dots(p'''-p')(p''-p')}, \text{ (elem. } p'', p''', p^{IV}, \dots p^{n}),$$

$$q'' = -\frac{\frac{1}{2}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{3}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \frac{1}{4}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-3} - \dots \pm \frac{1}{n+1}}{p''(p^{n}-p'')(p^{-}-p'')\dots(p'''-p'')(p'-p'')}, \text{ (elem. } p', p''', p^{IV}, \dots p^{n}),$$

. . . .

$$q^{n} = -\frac{\frac{1}{2}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{3}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \frac{1}{4}{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-3} - \dots \pm \frac{1}{n+1}}{p^{n}(p^{n-1}-p^{n})(p^{n-2}-p^{n})\dots(p''-p^{n})(p'-p^{n})}, \text{ (elem. } p', p'', p''', \dots p^{n-1}).$$

Jam sponte apparet, quatenus hoc theorema cum aliis quadraturae methodis congruat. Si adeo N quantitates p ita determinare velles, ut terminorum in (43.) adhuc reliquorum etiam N primi evanescerent, pro quantitatibus p et q valores illi resultarent a viro cl. *Gaufs* determinati. Qui cum alias magna cum utilitate adhibeantur, in nostro casu non satis magnum praestarent commodum, quia functiones $q^{r} f(a+p^{r} x) = q^{r}[l(a+p^{r} x)]^{-1}$ magnam tum in computando facerent importunitatem. Licet vero eundem assequi finem ita ut quantitates p', p'', ... plane ex arbitrio determines, dummodo in (43.) quantitates q', q'', ... ita constituas, ut ab $r$to demum seriei termino N termini evanescant. Quo facto proficiscitur aequatio

$$44. \quad \int f(a+x)\partial x =$$

$$\int fa.\partial a + x[(1+q'+q''+\dots+q^{n})fa - q'f(a+p'x) - q''f(a+p''x) - \dots - q^{n}f(a+p^{n}x)]$$
$$+ \frac{x^{2}}{1!}\cdot\frac{\partial fa}{\partial a}(\tfrac{1}{2} + q'.p' + q''.p'' + \dots + q^{n}.p^{n})$$
$$+ \frac{x^{3}}{2!}\cdot\frac{\partial^{2} fa}{\partial a^{2}}(\tfrac{1}{3} + q'.p'^{2} + q''.p''^{2} + \dots + q^{n}.p^{n2})$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{x^{r+1}}{r!}\cdot\frac{\partial^{r} fa}{\partial a^{r}}\left(\frac{1}{r+1} + q'.p'^{r} + q''.p''^{r} + \dots + q^{n}.q^{n\,r}\right)$$
$$+ \frac{x^{n+r+1}}{(n+r+1)!}\cdot\frac{\partial^{n+r+1} fa}{\partial a^{n+r+1}}\left(\frac{1}{n+r+2} + q'.p'^{n+r+1} + \dots + q^{n}.p^{n\,n+r+1}\right)$$
$$+ \text{etc.},$$

nec non valores quantitatum q', q'', ... qui sequuntur:

$$q' = -\frac{\frac{1}{r+2}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{r+3}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \dots \pm \frac{1}{n+r+1}}{p'^{r+1}(p^n-p')(p^{n-1}-p')\dots(p'''-p')(p''-p')}, \quad (\text{elem. } p'', p''', \dots p^n),$$

$$q'' = -\frac{\frac{1}{r+2}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{r+3}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \dots \pm \frac{1}{n+r+1}}{p''^{r+1}(p^n-p'')(p^{n-1}-p'')\dots(p'''-p'')(p'-p'')}, \quad (\text{elem. } p', p''', \dots p^n),$$

. . . .

$$q^n = -\frac{\frac{1}{r+2}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} - \frac{1}{r+3}\,{}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-2} + \dots \pm \frac{1}{n+r+1}}{p^{n\,r+1}(p^{n-1}-p^n)(p^{n-2}-p^n)\dots(p''-p^n)(p'-p^n)}, \quad (\text{elem. } p', p'', \dots p^{n-1}).$$

Si a non inferius est 100 neque x superat 5, sufficit ut $r = 3$ et $n = 2$ ponas, ut logarithmos integrales argumenti $a + x$ usque ad 7 locos decimales accurate computes. Quamquam ita etiam satis operosa restat computatio, ut in alias inquiramus formulas necesse est.

§. 9.

Quodsi series omnes pro logarithmo integrali nobis propositas inter se conferimus, neminem fugere potest paene omnes progredi secundum dignitates logarithmorum, ipsasque illas, quae ab initio secundum dignitates ipsius argumenti evolutae erant, in alias posse mutari, quae secundum dignitates illius logarithmi procederent; quae quidem res aperte docet, logarithmum integralem per theorema viri cl. *Soldner* simplicissime evolvi, posito $fa = la$. Habes ita, cum sit $l(a+x) - la = l\left(1 + \frac{x}{a}\right) = lu$,

$$45. \quad \mathrm{li}(a+x) = \mathrm{li}\,au = \mathrm{li}\,a + a\left[\frac{lu}{1}\cdot\frac{1}{la} + \frac{(lu)^2}{2!}\cdot\frac{la-1}{(la)^2} + \frac{(lu)^3}{3!}\cdot\frac{(la)^2-2la+1}{(la)^3} + \dots\right].$$

Coëfficientes terminorum $(lu)^n$ cum solius quantitatis a sint functiones, iis semel determinatis, ex hac formula logarithmi integrales totius seriei numerorum a subsequentium computari possunt neque requiritur, ut parvi tantum quantitatis x valores admittantur. Etenim cum adeo $x = a$ ponatur, $lu = l2$ satis exiguum habes, ut series ipsa cito convergat. Jam cum per formulam recurrentem

$$\frac{1-(n-1)A_{n-1}}{la} = A_n$$

coëfficientes posterior quique ex antecedenti derivari possint, seriem (45.) si adhibeas multum praebet commoditatis. Quare vir cl. *Soldner* seriem hanc non transformatam sed talem, qualem modo exhibuimus, ad computandam tabulam suam adhibuit. Licet vero multo augere ejus utilitatem,

dispositis nimirum coëfficientibus A, et terminis inde ortis alium ad ordinem inter se junctis. Prodit enim ex (45.)

$$46. \quad \text{li}\,au = \text{li}\,a + a\left\{\begin{array}{l} \frac{lu}{la} - \frac{1}{2}\left(\frac{lu}{la}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{lu}{la}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{lu}{la}\right)^4 + \dots \\ + \frac{(lu)^2}{1!2la} - \frac{(lu)^3}{1!3(la)^2} + \frac{(lu)^4}{1!4(la)^3} - \frac{(lu)^5}{1!5(la)^4} + \dots \\ + \frac{(lu)^3}{2!3la} - \frac{(lu)^4}{2!4(la)^2} + \frac{(lu)^5}{2!5(la)^3} - \frac{(lu)^6}{2!6(la)^4} + \dots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Collectis nunc terminis in serie horizontali collocatis, accipis aequationem:

$$\text{li}(au) = \text{li}\,a + a\Big\{l\left(1+\frac{lu}{la}\right) - \frac{la}{1!}\left[l\left(1+\frac{lu}{la}\right) - \frac{lu}{la}\right] - \frac{(la)^2}{2!}\left[l\left(1+\frac{lu}{la}\right) - \frac{lu}{la} + \frac{1}{2}\left(\frac{lu}{la}\right)^2\right] - \dots\Big\},$$

quae solutis denuo parenthesibus, singulisque terminis rite conjunctis, abit in hanc

$$47. \quad \text{li}\,au = \text{li}\,a + l\left(\frac{lau}{la}\right) + a\left(\frac{lu}{1!}C_1^{-la} + \frac{(lu)^2}{2!}C_2^{-la} + \frac{(lu)^3}{3!}C_3^{-la} + \dots\right).$$

Rursus igitur habemus series C^z, nec non ad speciem quam maxime commodam conformatas, cum z hic sit negativum ideoque opposita sese excipiant singulorum terminorum signa. Eandem aequationem (47.) adhibitis formulis (23.) et (24.) immediate ex formula (45.) derivare licet, cum pateat esse

$$A_n = G_n^{la} \pm \frac{(n-1)!}{(la)^n},$$

Contractis in (46.) terminis, linea perpendiculari sibi suppositis, relabimur ad seriem (42.), quam nunc ex *Taylori* et *Soldneri* theorematibus eandem oriri videmus. Solutis iterum in aequatione (42.) seriebus C^{lu} terminisque, qui aequales argumenti lu dignitates continent, inter se junctis, nova prodit formula:

$$48. \quad \text{li}\,au = \text{li}\,a + au\left[l\left(\frac{lau}{la}\right) - lu\,H_1 + (lu)^2 H_2 - (lu)^3 H_3 + \dots\right]$$

$$H_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{lu}{la} - \frac{1}{2.3\dots(n+1)}\cdot\left(\frac{lu}{la}\right)^2 + \frac{1}{3.4\dots(n+2)}\left(\frac{lu}{la}\right)^3 - + \dots$$

Coëfficientes H ex quantitatibus X §phi tertiae hos sibi habent valores:

$$\begin{aligned} H_0 &= l(1+x) \\ H_1 &= \frac{1+x}{1.x}H_0 - \frac{1}{1.1!}, \\ H_2 &= \frac{1+x}{2.x}H_1 - \frac{1}{2.2!}, \\ &\dots\dots\dots \\ H_n &= \frac{1+x}{n.x}H_{n-1} - \frac{1}{n.n!} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

unde accipimus et hos:

$$H_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{x}{1+x} + \frac{(n+1)x}{1+x} H_{n+1}, \quad H_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{x}{1+x} + \frac{(n+2)x}{1+x} H_{n+2} \text{ etc.}$$

Quos valores si in perpetuum sibi substituis, cum residuum $(n+1)(n+2)\dots(n+r)\left(\frac{x}{1+x}\right)^r H_{n+r}$ pro $r=\infty$ plane evanescat, coëfficientis H_n valor prodit sequens:

$$49. \quad H_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{x}{1+x} + \frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{n+3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots\right] = \frac{1}{n!} K_n.$$

Habemus autem casu nostro $\frac{x}{1+x} = \frac{lu}{lau}$, qua de causa aequatio (48.) abit in hanc:

$$50. \quad \text{li}\, au = \text{li}\, a + au\left[l\left(\frac{lau}{la}\right) - \frac{lu}{1!} K_1 + \frac{(lu)^2}{2!} K_2 - \frac{(lu)^3}{3!} K_3 + \dots\right],$$

quae nonnunquam bene adhiberi poterit.

Denique hoc loco notare convenit, ut omnes formulae in §pho 8. et 9. propositae alia etiam simplicissima via investigari possint. Est enim

$$\text{li}\, au = \int \frac{a\,\partial u}{lau} = \int \frac{a\,\partial u}{la + lu} = a\int \partial u\left[\frac{1}{la} - \frac{lu}{(la)^2} + \frac{(lu)^2}{(la)^3} - \frac{(lu)^3}{(lu)^4} + \dots\right],$$

unde, cum sit

$$\int \partial u\,(lu)^n = u[(lu)^n - n(lu)^{n-1} + n(n-1)(lu)^{n-2} - \dots \pm n(n-1)\dots 3.2\,lu \mp n!]$$
$$= G^{lu}_{n+1}(lu)^{n+1} \pm n!,$$

aequationem habes:

$$\text{li}\, au = c + a\left[G^{lu}_1 \frac{lu}{la} - G^{lu}_2\left(\frac{lu}{la}\right)^2 + G^{lu}_3\left(\frac{lu}{la}\right)^3 - \dots\right]$$
$$+ a\left[\frac{1}{la} + \frac{1!}{(la)^2} + \frac{2!}{(la)^3} + \frac{3!}{(la)^4} + \dots\right],$$

ex qua posito $u=1$, valorem constantis

$$c = \text{li}\, a - a\left[\frac{1}{la} + \frac{1!}{(la)^2} + \frac{2!}{(la)^3} + \dots\right]$$

accipis, qui suo loco substitutus aequationem nostram

$$51. \quad \text{li}\, au = \text{li}\, a + a\left[\frac{lu}{la} G^{lu}_1 - \left(\frac{lu}{la}\right)^2 G^{lu}_2 + \left(\frac{lu}{la}\right) G^{lu}_3 - + \dots\right.$$

eandem praebet, quam supra in (42.) jam invenimus, ita ut evolutiones functionis $\text{li}(a+x)$ ex theoremate *Tayloriano* vel *Soldneriano* omnino non sint necessariae.

§. 10.

Formulam illam (42.), quam triplici modo investigatam semper eandem invenimus, in tota hac theoria esse fundamentalem neminem fugere

potest, ita ut in alias novasque aequationes frustra inquirere videamur. Jam formula haec et illae in (47.) et (50.) propositae, quae ex ea descendunt, facultatem nobis praebent, logarithmum integralem pro quovis argumenti a valore satis commode computandi. Maximam autem utilitatem hae aequationes logarithmis integralibus dignitatum argumenti computandis suppeditant. Posito enim $a = a^n$ et $u = a$, prodeunt ex (42.) et (50.) aequationes

$$52.\quad \mathrm{li}\, a^{n+1} = \mathrm{li}\, a^n + a^{n+1}\left[\frac{1}{n}C_1^{-la} - \frac{1}{n^2}C_2^{-la} + \frac{1}{n^3}C_3^{-la} - \frac{1}{n^4}C_4^{-la} + \ldots\right],$$

$$53.\quad \mathrm{li}\, a^{n+1} = \mathrm{li}\, a^n + a^{n+1}\left[l(n+1) - \frac{la}{1!}K'_1 + \frac{(la)^2}{2!}K'_2 - \frac{(la)^3}{3!}K'_3 + \ldots\right],$$

$$K'_p = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{p+3}\left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \ldots$$

quarum ope aut logarithmos integrales dignitatum ejusdem radicis successive ascendentium, aut logarithmos integrales earundem dignitatum diversarum radicum commode computare poteris. Ex (52.) successive substituendo et haec prodit formula:

$$54.\quad \mathrm{li}\, a^{n+1} = \mathrm{li}\, a^{n-r} + C_1^{-la}\left[\frac{a^{n+1}}{n} + \frac{a^n}{n-1} + \frac{a^{n-1}}{n-2} + \ldots + \frac{a^{n+1-r}}{n-r}\right]$$
$$-C_2^{-la}\left[\frac{a^{n+1}}{n^2} + \frac{a^n}{(n-1)^2} + \frac{a^{n-1}}{(n-2)^2} + \ldots + \frac{a^{n+1-r}}{(n-r)^2}\right]$$
$$+C_3^{-la}\left[\frac{a^{n+1}}{n^3} + \frac{a^n}{(n-1)^3} + \frac{a^{n-1}}{(n-2)^3} + \ldots + \frac{a^{n+1-r}}{(n-r)^3}\right]$$
$$-\ \text{etc.}$$

ex qua licet ascendere a logarithmo integrali inferioris dignitatis argumenti a, omissis mediis terminis ad eam summae dignitatis argumenti; quae formula cum celerrime convergat omnibus iis satis commoda esse videatur, qui non nimia flagitant. Aequationem paucis admodum exemplis utilem series (47.) nobis praeberet, coëfficientibus C pro $a = a^n$ tardissime decrescentibus. Ut vero logarithmos integrales argumenti $\frac{a}{u}$ compararet haec series aptissima est, quippe quae, lu posito negativo, aequationem

$$55.\quad \mathrm{li}\,\frac{a}{u} = \mathrm{li}\, a + l\left(\frac{la - lu}{la}\right) - a\left[\frac{lu}{1!}C_1^{-la} - \frac{(lu)^2}{2!}C_2^{-la} + \frac{(lu)^3}{3!}C_3^{-la} - + \ldots\right]$$

suppeditat. Quodsi idem mutaveris in (42.) resultat:

$$56.\quad \mathrm{li}\,\frac{a}{u} = \mathrm{li}\, a - \frac{a}{u}\left[\frac{lu}{la}C_1^{lu} + \left(\frac{lu}{la}\right)^2 C_2^{lu} + \left(\frac{lu}{la}\right)^3 C_3^{lu} + \ldots\right],$$

quae quidem eadem est series, quam vir cl. *Bessel,* quamvis aliam prorsus viam ingressus, nactus est et ex qua duas formulas enucleavit, aequa-

tionibus (52.) et (54.) simillimas. Quodsi vero ad usum spectes, nostras quas modo exposuimus formulas utilitate sua *Besselianas* superare putaverimus, cum opposita in nostris et terminorum et coefficientium C sese excipiant signa, ideoque posito $a > 1$ magis quam *Besselianae* convergant. Posito autem $a < 1$ formulae nunc *Besselianae* antehabendae fuerint, cum iis adhibitis certe in coëfficientibus C opposita se signa excipiant. Pari denique modo ex serie (55.) transmutata novam habes aequationem sequentem:

$$57. \quad \mathrm{li}\frac{1}{au} = \mathrm{li}\frac{1}{a} + l\left(1 + \frac{lu}{la}\right) - \frac{1}{a}\left[\frac{lu}{1!}C_1^{la} - \frac{(lu)^2}{2!}C_2^{la} + \frac{(lu)^3}{3!}C_3^{la} - + \ldots\right].$$

Quae aequationes, rite inter se junctae, ad tabulam logarithmorum integralium conscribendam optime sufficiunt, cum quantitates a et u valorem quemvis vel integrum vel fractum habere possint. Jam uti in logarithmorum naturalium computatione sufficit, ut logarithmos solummodo numerorum primorum investiges, ita ad tabulam logarithmorum integralium exstruendam id unum necesse est, ut valores coëfficientium $C_n^{\pm lu}$ pro $u = 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}, \frac{17}{16}, \frac{19}{18}, \frac{23}{22}$ etc. computes, quippe quorum ope totam functionis nostrae tabulam condere licet. His enim coëfficientibus indagatis aequatio (29.) logarithmos integrales suppeditat argumenti $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$ etc. nec non argumenti $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ etc., qui cum totius tabulae fundamentum sint, ut ad computationem verificandam eos ex aequatione (2.) iterum evolvas operae, cum paene nulla sit, pretium magnopere facias. Jam vero ex (52.) seu (54.) logarithmos integrales dignitatis $n$tae omnium horum numerorum nancisceris, quos verificationis gratia iterum ex (53.) quaeras. Denique si logarithmos integrales computas numerorum 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 eorumque dignitatum priorum, nunc tabulae schema habes, quod facili opera explere potes; nec non perpetuo providetur, ne errorem in computando committas.

§. 11.

Coronidis loco aequationes quaedam afferantur, quae ex substitutione $a = e$ seu $la = le = 1$ proficiscuntur. Etenim est

$$58. \quad \mathrm{li}\, e^{\pm n} = \gamma + ln \pm \frac{n}{1.1!} + \frac{n^2}{2.2!} \pm \frac{n^3}{3.3!} + \frac{n^4}{4.4!} \pm \text{etc.}$$
$$= \gamma + ln \pm n[C_2^{\pm n} + \tfrac{1}{2}C_3^{\pm n} + \tfrac{1}{3}C_4^{\pm n} + \ldots],$$

$$59.\quad \mathrm{li}\,e^{n+1} = \mathrm{li}\,e^n + e^{n+1}\left[\frac{1}{n}C_1^{-1} - \frac{1}{n^2}C_2^{-1} + \frac{1}{n^3}C_2^{-1} - + \ldots\right]$$
$$= \mathrm{li}\,e^n + e^{n+1}\left[l(1+n) - \frac{1}{1!}K_1' + \frac{1}{2!}K_2' - \frac{1}{3!}K_3' + \ldots\right],$$

$$60.\quad \begin{cases} \mathrm{li}(e^n + x) = \mathrm{li}\,e^n + l\left[\frac{l(e^n+x)}{n}\right] + e^n\left[\frac{lv}{1!}C_1^{-n} + \frac{(lv)^2}{2!}C_2^{-n} + \frac{(lv)^3}{3!}C_3^{-n} + \ldots\right], \\ lv = l\left(1 + \frac{x}{e^n}\right), \\ \mathrm{li}\,e^n u = \mathrm{li}\,e^n + e^n u\left[\frac{lu}{n}C_1^{-lu} - \left(\frac{lu}{n}\right)^2 C_2^{-lu} + \left(\frac{lu}{n}\right)^3 C_3^{-lu} - \ldots\right], \end{cases}$$

$$61.\quad \mathrm{li}\frac{1}{e^n} = -\frac{1}{e^n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1!1!}{(n+1)(n^2+4n+2)} + \frac{2!2!}{(n^2+4n+2)(n^3+9n^2+18n+6)} + \ldots\right]$$
$$= -\frac{1}{n.e^n} + \frac{1}{n.e^n}\left[\frac{1}{n+2}\right]\left[1 + \frac{1!2!}{n^2+6n+6}\right]\left[1 + \frac{2!3!}{(n+4)(n^3+12n^2+36n+24)}\right]\ldots$$
$$= -\frac{1}{n.e^n}\left[1 - \frac{1}{n+2}\right]\left[1 - \frac{1!2!}{(n+1)(n^2+6n+6)}\right]\left[1 - \frac{2!3!}{(n^2+6n+2)(n^3+12n^2+36n+24)}\right]\ldots$$

Posito $n = 1$ valores inde resultant particulares:

$$62.\quad \mathrm{li}\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}\left[\frac{1}{2} + \frac{1!1!}{2.7} + \frac{2!2!}{7.34} + \frac{3!3!}{34.209} + \frac{4!4!}{209.1564} + \frac{5!5!}{1564.13327}\right.$$
$$\left. + \frac{6!6!}{13327.130922} + \frac{7!7!}{130922.1441729} + \ldots\right]$$
$$= -\frac{1}{e} + \frac{1}{e}.\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1!2!}{1.13}\right)\left(1 + \frac{2!3!}{5.73}\right)\left(1 + \frac{3!4!}{29.501}\right)\left(1 + \frac{4!5!}{201.1051}\right)$$
$$\times\left(1 + \frac{5!6!}{1631.37633}\right)\ldots$$
$$= -\frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1!2!}{2.13}\right)\left(1 - \frac{2!3!}{8.73}\right)\left(1 - \frac{3!4!}{44.501}\right)\left(1 - \frac{4!5!}{300.4051}\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{5!6!}{2420.37633}\right)\ldots$$

Fractionum subsidio approximatarum e fractione continua ($a.$) §phi quartae evolutarum haec quoque aequatio proficiscitur:

$$63.\quad \mathrm{li}\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\frac{6}{7}.\frac{14}{13}.\frac{65}{68}.\frac{374}{365}.\frac{2263}{2299}.\frac{15675}{15531}.\frac{115230}{117300}\ldots$$

Jam sine ullo labore lex, qua divisores factorum singulorum progrediuntur, ex formulis in §pho 6. et 7. propositis recurrentibus evolvi potest. Est enim ex. gr. $73 = 7.13 - 2.3.3$; $501 = 9.73 - 3.4.13$; $4051 = 11.50 - 4.5.73$. Pari modo habes $44 = 7.8 - 2.3.2$; $300 = 9.44 - 3.4.8$ etc. Valorem $\mathrm{li}\frac{1}{e}$ ipsum nunc sequentem enucleavimus:

$$\mathrm{li}\,\frac{1}{e} = -0{,}21938.39343\ 95520\ 27366\ 5,\ldots$$

cui addimus hunc correspondentem:

$$\mathrm{li}\,e = \quad 1{,}89511\ 78163\ 55936\ 75547\ 8,\ldots$$

Quibus omnibus praeparatis id solummodo nobis agendum videtur, ut tabulam functionis nostrae satis expeditam exstruamus, quod opus autem operosissimum, quamvis ejus fundamenta jam sint jacta, in aliud tempus nobis differendum est otiosius. Tunc vero non solum hanc tabulam sed theoriam etiam et tabulas aliarum quarundam functionum, cum logarithmo integrali arcte junctarum, exhibeamus.

Scripsi Gothae, die 13ma Oct. 1835.

16.

Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires.

(Par Mr. G. *Lejeune Dirichlet.*)

Dans un mémoire que j'ai lu à l'Académie des sciences de Berlin, et dont on trouve un extrait dans le compte rendu pour le mois de juillet dernier, je me suis proposé de prouver rigoureusement que toute progression arithmétique indéfinie dont le premier terme et la différence sont des entiers sans diviseur commun, renferme nécessairement une infinité de nombres premiers. Les recherches que j'ai eu à faire pour arriver à une démonstration complète de cette proposition qui peut être employée avec succès dans différentes questions relatives aux nombres, m'ont donné lieu de remarquer un rapport assez singulier entre deux théories qui ne présentaient jusqu'à présent aucun point de contact.

On sait que l'équation $t^2 - pu^2 = 1$, dans laquelle p désigne un entier positif non-quarré, est toujours résoluble en nombres entiers, et que cette proposition fondamentale dans la théorie des équations indéterminées du second degré, a été déduite par *Lagrange* de la considération de la fraction continue périodique qui résulte du développement du radical $\sqrt{p}$. Il est remarquable que la résolution de l'équation précédente puisse aussi se rattacher à la théorie des équations binomes dont la science est redevable à Mr. *Gauſs*. Il résulte non seulement de cette théorie que l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ est toujours résoluble, mais on peut même en déduire des formules générales qui expriment les inconnues t et u en fonctions circulaires.

Quoique cette manière de traiter l'équation dont il s'agit soit applicable à tous les cas, je me bornerai dans cette note à développer celui où p est un nombre premier, ce cas suffisant pour faire connaître l'esprit de la méthode. Il est sans doute inutile d'ajouter que le mode de solution que nous allons indiquer, est beaucoup moins propre au calcul numérique que celui qui dérive de l'emploi des fractions continues et que cette nouvelle

manière de résoudre l'équation $t^2-pu^2=1$, ne doit être envisagée que sous le rapport théorique et comme un rapprochement entre deux branches de la science des nombres.

Soit p un nombre premier impair et considérons l'équation

$$1.\quad \frac{x^p-1}{x-1}=X=0.$$

Les racines de cette équation sont données par l'expression $e^{m\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}$, dans laquelle e et π ont la signification ordinaire et m désigne un entier compris dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ p-1.$$

Parmi ces entiers il y a $\frac{p-1}{2}$ résidus et autant de non-résidus quadratiques de p, que nous désignerons respectivement et pris das un ordre quelconque par

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{\frac{p-1}{2}}\quad\text{et}\quad b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_{\frac{p-1}{2}}.$$

Cela posé il résulte de la théorie de Mr. *Gauſs* *) qu'on a ces deux équations

$$2.\ \begin{cases} Y+Z\sqrt{\pm p}=2\left(x-e^{a_1\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\left(x-e^{a_2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(x-e^{a_{\frac{p-1}{2}}\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right),\\ Y-Z\sqrt{\pm p}=2\left(x-e^{b_1\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\left(x-e^{b_2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(x-e^{b_{\frac{p-1}{2}}\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right),\end{cases}$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu suivant que p a la forme $4\mu+1$ ou celle-ci $4\mu+3$, et Y, Z étant des polynomes en x dont les coëfficiens sont entiers. Les équations précédentes étant multipliées entre elles donnent

$$3.\quad 4X=Y^2\mp pZ^2.$$

Comme les nombres $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{\frac{p-1}{2}}$, abstraction faite de l'ordre, sont les restes qui proviennent des quarrés $1^2,\ 2^2,\ \ldots\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ lorsqu'on divise ceux-ci par p, la première des équations (2.) peut évidemment être remplacée par celle-ci

$$4.\quad Y+Z\sqrt{\pm p}=2\left(x-e^{1^2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\left(x-e^{2^2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(x-e^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right).$$

Distinguons actuellement les deux cas que p peut présenter et supposons en premier lieu p de la forme $4\mu+1$. Faisant $x=1$, dans les équations (3.) et (4.) et désignant par g et h les valeurs entières de Y et Z cor-

*) Disquisitiones arithmeticae. Art. 357.

espondantes à cette supposition, il viendra

$$5.\quad g^2-ph^2=4p,$$

$$g+h\sqrt{p}=2\left(1-e^{1^2\cdot\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\left(1-e^{2^2\cdot\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-e^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right).$$

Comme l'on a

$$1-e^{s^2\cdot\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}=-2\sqrt{-1}\cdot\sin s^2\frac{\pi}{p}\cdot e^{s^2\cdot\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

la dernière équation prendra la forme

$$g+h\sqrt{p}=2^{\frac{p+1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{4}}\sin 1^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin 2^2\frac{\pi}{p}\ldots\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\frac{\pi}{p}\cdot e^{\left[1^2+2^2+\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right]\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

On a d'un autre côté

$$1+2^2+\ldots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=p\,\frac{p^2-1}{24},$$

où $\frac{p^2-1}{24}$ est évidemment un entier pair ou impair suivant que p a la forme $8\mu+1$ ou celle-ci $8\mu+5$. Le facteur exponentiel est donc suivant ces deux $+1$ ou -1 et peut par conséquent être exprimé par $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$. Substituant cette expression dans l'équation précédente et se rappelant que $\frac{p-1}{2}$ est pair, il viendra

$$g+h\sqrt{p}=2^{\frac{p+1}{2}}\sin 1^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin 2^2\frac{\pi}{p}\ldots\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\frac{\pi}{p}.$$

Il résulte de l'équation (5.), que l'entier g est divisible par p; en mettant donc pk à la place de g, on aura

$$6.\quad h^2-pk^2=-4,$$

$$a+k\sqrt{p}=\frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{p}}\sin 1^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin 2^2\frac{\pi}{p}\ldots\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\frac{\pi}{p}=\alpha.$$

On voit donc qu'il existe des entiers h et k, tels que $h^2-pk^2=-4$, et que ces entiers peuvent généralement être exprimés par les fonctions circulaires, car l'on conclut facilement des équations précédentes

$$h=\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{\alpha},\qquad k=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{\alpha}\right).$$

Pour passer à l'équation $t^2-pu^2=1$, il faudra distinguer le cas où p a la forme $8\mu+1$ et celui où $p=8\mu+5$.

Dans le premier de ces deux cas, h et k seront évidemment pairs l'un et l'autre et l'on aura

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2-p\left(\frac{k}{2}\right)^2=-1,$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{h}{2}+\frac{k}{2}\sqrt{p}\right)^2=t+u\sqrt{p},$$

les parties rationnelles et les coëfficiens de $\sqrt{p}$ étant égalés séparément.

Lorsque p est de la forme $8\mu+5$, h et k seront impairs l'un et l'autre. En posant alors $(h+k\sqrt{p})^3=h'+k'\sqrt{p}$ et par conséquent $h'=h^3+3phk^2$, $k'=3h^2k+pk^3$, on aura l'équation

$$h'^2-pk'^2=-4^3.$$

Il est facile de voir que les nombres h' et k' sont l'un et l'autre divisibles par 8. Il suffit, pour s'en assurer, de les mettre sous cette autre forme en ayant égard à l'équation (6.)

$$h'=4h(pk^2-1),\qquad k'=4k(h^2+1).$$

L'équation précédente deviendra donc

$$\left(\frac{h'}{8}\right)^2-p\left(\frac{k'}{8}\right)^2=-1,$$

d'où l'on déduit la solution de l'équation $t^2-pu^2=1$, en posant, comme plus haut,

$$\left(\frac{h'}{8}+\frac{k'}{8}\sqrt{p}\right)^2=t+u\sqrt{p}.$$

Considérons en second lieu le cas où p est de la forme $4\mu+3$.

Dans ce cas, les coëfficiens des termes à égale distance des extrêmes $2x^{\frac{p-1}{2}}$ et -2 du polynome Y ont les mêmes valeurs numériques avec des signes opposés, de sorte qu'on peut mettre ce polynome sous la forme

$$Y=2(x^m-1)+ax(x^{m-2}-1)+bx^2(x^{m-4}-1)+\ldots,$$

en posant pour abréger $m=\frac{p-1}{2}$.

Et comme en attribuant à l'indéterminée x la valeur particulière $\sqrt{-1}$, on a

$$x^m-1=-(1+\sqrt{-1}),\qquad x(x^{m-2}-1)=-(1+\sqrt{-1}),$$
$$x^2(x^{m-4}-1)=1+\sqrt{-1},\qquad x^3(x^{m-6}-1)=1+\sqrt{-1}\quad\text{etc.}$$

ou

$$x^m-1=-(1-\sqrt{-1}),\qquad x(x^{m-2}-1)=1-\sqrt{-1},$$
$$x^2(x^{m-4}-1)=1-\sqrt{-1},\qquad x^3(x^{m-6}-1)=-(1-\sqrt{-1})\quad\text{etc.}$$

suivant que m a la forme $4\mu+3$ ou celle-ci $4\mu+1$, ou ce qui est la même chose, suivant que p a la forme $8\mu+7$ ou $8\mu+3$, on voit que le polynome Y deviendra selon ces deux cas

$$g(1+\sqrt{-1})\quad\text{ou}\quad g(1-\sqrt{-1}),$$

g désignant un entier réel. Quant à l'autre polynome Z dont les coëfficiens également distans du commencement et de la fin sont égaux, on trouve d'une manière toute semblable, qu'il se réduit pour $x=\sqrt{-1}$,

à la forme $h(1-\sqrt{-1})$ ou à celle-ci $h(1+\sqrt{-1})$, suivant qu'on a $p = 8\mu + 7$ ou $p = 8\mu + 3$, h désignant pareillement un entier réel.

Il résulte de là et de ce que l'on a évidemment $X = \sqrt{-1}$ pour $x = \sqrt{-1}$, que l'équation $4X = Y^2 + pZ^2$ deviendra dans cette même supposition,

$$g^2(1 \pm \sqrt{-1})^2 + ph^2(1 \mp \sqrt{-1})^2 = 4\sqrt{-1},$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu suivant que p a la forme $8\mu + 7$ ou celle-ci $8\mu + 3$.

L'équation précédente est équivalente à celle-ci

$$7. \quad g^2 - ph^2 = \pm 2,$$

qui est donc toujours résoluble et de laquelle on passe facilement à l'équation $t^2 - p u^2 = 1$ en posant $(g + h\sqrt{p})^2 = 2t + 2u\sqrt{p}$, où t et u seront des entiers, g et h étant évidemment impairs. Pour exprimer ensuite g et h par des fonctions circulaires, l'on posera $x = \sqrt{-1}$ dans l'équation (4.) et l'on combinera le résultat de cette substitution avec l'équation (7.)

On voit que la solution que l'on vient d'indiquer, n'est qu'un corollaire très simple du théorème dû à Mr. *Gaufs* et d'après lequel le polynome $4X$ peut toujours être mis sous la forme $Y^2 \mp pZ^2$, p étant un nombre premier. Pour étendre la même solution au cas général où p est un nombre composé, il faut donner une plus grande étendue au théorème cité. Cette généralisation ne présente aucune difficulté et peut se déduire des principes sur lesquels repose l'analyse de Mr. *Gaufs*. C'est pourquoi je me contenterai d'indiquer le résultat pour le cas d'un nombre composé de deux facteurs premiers. Les lettres p et q désignant deux nombres premiers impairs différens, on trouve que la fonction entière

$$8. \quad 4\frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$$

peut toujours se mettre sous la forme $Y^2 \mp pqZ^2$, Y et Z désignant toujours des polynomes, dont tous les coëfficiens sont des entiers, et le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu suivant que le produit pq a la forme $4\mu + 1$ ou celle-ci $4\mu + 3$. Cette décomposition résulte comme dans le cas particulier d'un seul nombre premier, de la distribution des racines de l'equation que l'on obtient en égalant l'expression (8.) à zéro, en deux groupes.

Voici un exemple de cette décomposition. Faisant $p = 3$, $q = 11$, on aura

$$4\frac{(x^{33}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^{11}-1)} = Y^2 - 33Z^2,$$

$$Y = 2x^{10} - x^9 + 8x^8 + 5x^7 + 2x^6 + 14x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - x + 2,$$
$$Z = x^9 + x^7 + 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x.$$

17.

Sur les expressions du reste de la série de Taylor.

(Par Mr. *Chr. Jürgensen*, de Copenhague.)

On sait que *Lagrange* et *Ampère* ont donné deux expressions diverses de la fonction, qu'on doit ajouter en se bornant à un nombre limité de termes dans la série de *Taylor*.

La première de ces expressions résulte de la différentiation de l'équation

$$fz = fx + f'x\frac{z-x}{1} + f''x\frac{(z-x)^2}{1.2} + \ldots + f^{(n)}x\frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n} + Q.$$

En effet, en différentiant par rapport à x, et intégrant ensuite, on aura la valeur de Q, qu'on peut écrire ainsi

$$1.\quad Q = -\int_z^x f^{(n+1)}s\frac{(z-s)^n}{1.2.3\ldots n}\partial s.$$

Il est facile de lui donner les formes, sous lesquelles on la rencontre dans les écrits de *Lagrange*, *Laplace* et *Lacroix*.

La seconde expression, celle d'*Ampère*, est formée par l'élimination de $P, P', P'', \ldots P^{(n-1)}$ entre l'équation identique

$$fz = fx + P(z-x),\quad \text{où}\quad P = \frac{fz-fx}{z-x}$$

et ses dérivées par rapport à x, jusqu'à l'ordre n, lesquelles sont de la forme

$$a.\quad 0 = f^{(n)}x + P^{(n)}(z-x) - nP^{(n-1)},$$

On a ainsi

$$2.\quad Q = P^{(n)}\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

Comparant les deux équations (1.) et (2.) on a

$$\int_z^x f^{(n+1)}s\frac{(z-s)^n}{1.2.3\ldots n}\partial s + P^{(n)}\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

équations facile à vérifier, soit en observant que la dérivée de (a.), multipliée par $(z-x)^n$ peut s'écrire ainsi:

$$f^{(n+1)}x(z-x)^n + [P^{(n)}(z-x)^{n+1}]' = 0,$$

soit en développant $P^{(n)}$ et $\int f^{(n+1)}s(z-s)^n\partial s$ par les formules connues

$$\frac{\partial^n (W.V)}{\partial v} = W\frac{\partial^n V}{\partial v^n} + \frac{n}{1}W'\frac{\partial^{n-1} V}{\partial v^{n-1}} + \frac{n.(n-1)}{1.2}W''\frac{\partial^{n-2} V}{\partial v^{n-2}} + \ldots,$$

$$\int WV\partial v = W\int V\partial v - W'\iint V\partial v^2 + W''\iiint V\partial x^3 - \ldots$$

ce qui forme en même temps des démonstrations simples du théorème de *Taylor*.

Du reste, le procédé d'*Ampère*, qui contient une différentiation repétée, correspond à celui de d'*Alembert*, qui par l'intégration n fois repétée de $f^{(n)}(x+h)$, chaque fois depuis $h=0$ jusqu'à $h=h$, conduit à la série de *Taylor* et à l'expression du reste de la série au moyen d'une intégrale multiple, qui se transforme dans une intégrale simple.

La manière ordinaire dont on démontre le théorème de *Taylor* a aussi l'avantage de conduire directement à l'expression du reste, ainsi qu'on va le voir.

Supposant

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{m-1} + t x^m = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \lambda' x^{m-1} + t' x^m$$

α, β, γ, ... λ, α', β'. γ', ... λ' étant des quantités constantes et t, t' deux fonctions de x telles que $x=0$ donne $tx=0$ et $t'x=0$, on démontre aisément que $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, ... $\lambda=\lambda'$, $t=t'$.

C'est le principe des coefficiens indéterminées. En l'appliquant au développement d'une fonction fractionnaire

$$\frac{\varphi x}{\psi x} = a + bx + cx^2 + \ldots + zx^n,$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles et entières, et z une fonction telle que $x=0$ donne $z=0$, on trouvera la valeur de z au moyen de l'équation $t=t'$, qui dans ce cas est du premier degré. Si l'on développe une fonction de la forme $\sqrt{(\varphi x)}$, φ étant rationnelle et entière, on aura une équation $t=t'$ du second degré, et ainsi de suite.

Pour le développement d'une fonction quelconque de $x+y$ suivant les puissances ascendantes de y, cette équation est aux différences partielles entre z, x et y. En effet, si l'on suppose

$$f(x+y) = fx + py + qy^2 + ry^3 + \ldots + vy^n + zy^{n+1},$$

p, q, ... v étant des fonctions de x et y, on a

$$f'x + p'y + q'y^2 + r'y^3 + \ldots + v'y^n + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)y^{n+1}$$
$$= p + 2qy + 3ry^2 + \ldots + nvy^{n-1} + (n+1)zy^n + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)y^{n+1},$$

ce qui donnera les valeurs de p, q, etc. jusqu'à

$$v = \frac{f^{(n)}x}{1.2.3\ldots.n}$$

et ensuite pour la détermination de z l'équation aux différences partielles

$$\frac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)y = (n+1)z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)y.$$

D'abord il est aisé de voir, que cette équation est satisfaite par les valeurs de z, qu'on tire des équations (1.) et (2.).

Pour cela, en écrivant dans la première $x+y$ au lieu de z, faisant $s = x+y[1-t]$ et divisant par y^{n+1}, on a

$$z = \int_0^1 f^{(n+1)}(x+y[1-t])\frac{t^n}{1.2.3\ldots.n}\partial t.$$

Substituant cette valeur dans l'équation

$$\frac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n} + y\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] = (n+1)z$$

on trouve

$$\frac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n} + y\int_0^1 f^{(n+2)}(x+y[1-t])\frac{t^{n+1}}{1.2.3\ldots.n}\partial t$$
$$= (n+1)\int_0^1 f^{(n+1)}(x+y[1-t])\frac{t^n}{1.2.3\ldots.n}\partial t,$$

qui, en intégrant par parties le second membre, par rapport au facteur $t^n \partial t$, se réduit à

$$\frac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n} = f^{(n+1)}(x+y[1-t])\frac{t^{n+1}}{1.2.3\ldots.n}, \quad \begin{Bmatrix} t=0 \\ t=1 \end{Bmatrix},$$

équation identique.

De la seconde expression ci-dessus on tire

$$z = \frac{\partial^n\left(\frac{fu-fx}{u-x}\right)}{1.2.3\ldots.n.\partial x^n},$$

u étant $= x+y$. Si l'on ne fait varier x qu'autant qu'il est conten dans u, on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

donc, en faisant varier en même temps fx et x, on obtient

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^{n+1}\left(\frac{fu-fx}{u-x}\right)}{1.2.3\ldots.n.\partial x^{n+1}}.$$

Substituant dans l'équation différentielle, on trouve

$$f^{(n+1)}x + (u-x)\frac{\partial^{n+1}\frac{fu-fx}{u-x}}{\partial x^{n+1}} = (n+1)\frac{\partial^n\frac{fu-fx}{u-x}}{\partial x^n},$$

équation identique en vertu de l'équation (a.).

En intégrant l'équation linéaire

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (n+1)z - \frac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n}$$

suivant les règles connues, on obtiendra

$$z = -\frac{1}{(c-x)^{(n+1)}}\left[\int\frac{(c-x)^n f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.n}\partial x + C\right],$$

où l'on fera après l'intégration $c = x+y$ et $C = \varphi c$, φ désignant une fonction arbitraire. On peut donner à cette expression la forme

$$z = -\frac{1}{y^{n+1}}\left[\int_{x+y}^{x}\frac{(x+y-s)^n f^{(n+1)}s}{1.2.3\ldots.n}\partial s + \varphi(x+y)\right].$$

Puisqu'on doit avoir $zy^{n+1} = 0$ lorsque $y = 0$, et que l'intégrale définie s'évanouit dans la même supposition, on a $\varphi = 0$, d'où, en faisant $s = x+y[1-t]$,

$$z = \int_0^1 f^{(n+1)}(x+y[1-t])\frac{t^n}{1.2.3\ldots.n}\partial t,$$

ce qui revient au théorème de *Lagrange*.

25. Juin 1837.

18.

Géométrie imaginaire.

(Par Mr. *N. Lobatschewsky,* recteur de l'uuiversité de Cazan.)

Il y a à peu près cinq ans que j'ai fait insérer dans un journal scientifique qui paraissait à Cazan, quelques articles sur les élémens de la géométrie. Après y avoir développé une nouvelle théorie des parallèles, j'ai tâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits, et que la géométrie n'en peut pas moins exister, si non dans la nature, au moins dans l'analyse, lorsqu'on admet l'hypothèse de la somme des angles moindre que la démicirconférence du cercle. Dans les articles cités j'étais même parvenu, par des considérations toujours géométriques et ne m'appuyant que sur cette nouvelle hypothèse, à donner des équations fondamentales pour le rapport entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne; enfin j'ai donné aussi les expressions générales pour les élémens différentiels des lignes courbes, des surfaces et du volume des corps dans cette géométrie nouvelle que je veux nommer *imaginaire.* Cependant resserré alors dans les limites d'un journal, je ne crois pas avoir traité ce sujet avec tout le détail nécessaire. Je m'apercois à présent que beaucoup de propositions que j'y ai annoncées sans en donner en même tems les démonstrations, et le peu de développement qu'on doit rémarquer d'abord dans des calculs fort longs et embarassants, n'ont peut être que trop contribué à rendre inintelligible tout mon travail et à jeter même du doute sur la vérité de ce que je voulais y énoncer. Mais si d'un côté je ne désirais revenir sur cette matière qu'en écrivant déjà d'après un plan un peu plus étendu; de l'autre je me suis résolu à soumettre encore une fois au jugement des savans les résultats que j'ai obtenus, en les vérifiant d'une manière nouvelle. C'est en rebroussant pour ainsi dire chemin et en partant d'abord des équations fondamentales que je tâcherai d'introduire leur adoption dans la géométrie et de mettre hors de doute qu'ils puissent jamais mener à une absurdité, sous quelque rapport que ce soit.

Soit e la base des logarithmes naturels, π le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre. Désignons par a un nombre quelconque positif et qui représente en même tems la longueur d'une ligne droite; a' un angle $\geqq 0$, $\leqq \frac{1}{2}\pi$ qui en dépend et dont la valeur peut être calculée au moyen d'une de ce trois équations identiques

$$\sin a' = \frac{2e^a}{e^{2a}+1}, \quad \cos a' = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}, \quad \cot \tfrac{1}{2} a' = e^a.$$

Nous continerons de même à accentuer une lettre pour désigner un angle qui en dépend de la même manière que a' dérive de a.

Soient à présent p, q deux côtés d'un triangle rectiligne rectangle; P, Q les deux angles opposés, r l'hypothénuse. J'ai démontré qu'en supposant $P+Q < \frac{1}{2}\pi$, on a

$$1. \quad \sin r' = \sin p' \sin q',$$

$$2. \quad \sin r' = \operatorname{tang} P \operatorname{tang} Q,$$

$$3. \quad \operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} p' \sin P.$$

Ces trois équations, indépendamment de ce que p', q', r', P, Q sont sensées déjà y représenter, peuvent être regardées comme autant de conditions qui limitent le nombre des inconnues arbitraires.

La combinaison de la première avec la troisième nous donne

$$\cos r' \sin P = \cos p' \sin q'.$$

Après avoir élevé cette nouvelle équation au carré, si on y met la valeur de $\sin p'$ tirée de l'équation (1.), on a

$$4. \quad \cos q' = \cos r' \cos P$$

sans ambiguité des signes à cause de tous les angles aigus.

En éliminant r' des équations (3.), (4.) on aura

$$5. \quad \operatorname{tang} P = \cos p' \operatorname{tang} q'.$$

En faisant la même chose dans les équations (2.), (3.), on trouve

$$6. \quad \sin Q = \sin p' \cos P.$$

Des équations (2.), (4.) dérive encore une nouvelle équation

$$\operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} q' \sin Q$$

qui est par rapport à q', Q ce que l'équation (3.) est par rapport à p', P, et dont les combinaisons avec les deux premières (1.), (2.) fourniront des équations semblables à (4.), (5.), (6.) où l'on n'a dans ce but qu'à changer les lettres p', q', P, Q contre q', p', Q, P.

Il suit de cela que les trois équations (1.), (2.), (3.) une fois admises comme appartenantes à un triangle rectiligne rectangle dont p, q sont les

côtés, r l'hypothénuse, P, Q les angles opposées à p, q, toutes les six équations (1.), (2.), (3.), (4.), (5.), (6.) y appartiendront de même telles qu'elles sont, ou avec le changement correspondant des lettres dans celles de ces équations qui ne sont pas symmétriques par rapport aux quantités p', q', r', P, Q.

Soient à présent a, b, c les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque; A, B, C les angles opposées à ces côtés. Supposons d'abord que $A < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 1.), parcequ'il y aura toujours au moins deux pareils angles parmi les trois angles A, B, C. Du point d'intersection commun aux lignes a, b, menons la perpendiculaire x à la base c du triangle, et nommons y la partie de c coupée du côté de l'angle A, $c-y=z$ celle du côté de l'angle B. Dans le triangle rectangle dont les côtés sont b, x, y on a d'après l'équation (3.)

$$\tang b' = \tang x' \sin A.$$

De la même manière dans le triangle dont les côtés sont a, x, z, nous avons

$$\tang a' = \tang x' \sin B.$$

D'où il suit que

$$7. \quad \tang a' \sin A = \tang b' \sin B.$$

La même chose eût été trouvée si l'on eût supposé l'un des deux angles A, B, obtu.

Dans le triangle rectangle dont les côtés sont b, x, y, on a encore d'après l'équation (4.)

$$\cos y' = \cos b' \cos A,$$

d'où l'on tire

$$e^{2y} = \frac{1+\cos b' \cos A}{1-\cos b' \cos A}.$$

De la même manière dans le triangle rectangle dont les côtés sont a, x, z, on trouve

$$e^{2z} = \frac{1+\cos a' \cos B}{1-\cos a' \cos B}.$$

Par conséquent

$$8. \quad e^{2c} = \left(\frac{1+\cos a' \cos B}{1-\cos a' \cos B}\right)\left(\frac{1+\cos b' \cos A}{1-\cos b' \cos A}\right).$$

Si un des angles A, B, par exemple A est obtu (Fig. 2.), la perpendiculaire x coupera le prolongement de la ligne c à la distance y du sommet de l'angle A, et à la distance $z=c+y$ du sommet de l'angle B. Dans ce cas on aura donc

$$\cos y' = -\cos b' \cos A, \quad \cos z' = \cos a' \cos B,$$

puis

$$e^{2y} = \frac{1-\cos b'\cos A}{1+\cos b'\cos A}, \quad e^{2z} = \frac{1+\cos a'\cos B}{1-\cos a'\cos B}.$$

En réunissant ces deux équations on a de nouveau l'équation (8.) qui se rapporte ainsi à tous les triangles en général et peut encore se présenter sous cette autre forme:

$$\cos a'\cos B = \frac{(e^{2c}-1)-(e^{2c}+1)\cos b'\cos A}{e^{2c}+1-(e^{2c}-1)\cos b'\cos A}$$

ou bien d'après la notation adoptée

$$9. \quad \cos a'\cos B = \frac{\cos c'-\cos b'\cos A}{1-\cos b'\cos c'\cos A}.$$

En y mettant la valeur de $\cos B$ tirée de l'équation (7.), nous avons

$$\cos a'^2 - \sin a'^2 \sin A^2 \cot b'^2 = \left(\frac{\cos c'-\cos b'\cos A}{1-\cos b'\cos c'\cos A}\right)^2.$$

D'où il suit que

$$\sin a'^2(1+\sin A^2\cot b'^2) = \sin c'^2\,\frac{1-\cos b'^2\cos A^2}{(1-\cos b'\cos c'\cos A)^2}.$$

Après avoir multiplié cette équation par $\sin b'^2$ et divisée par $1-\cos b'^2\cos A^2$, si l'on extrait la racine carrée, on aura enfin l'équation

$$10. \quad \frac{\sin b'\sin c'}{\sin a'} = 1-\cos b'\cos c'\cos A.$$

Le produit de cette équation avec l'équation (9.) donne celle-ci

$$\cot a'\cos B\sin b'\sin c' = \cos c'-\cos b'\cos A,$$

qui après la substitution de la valeur de $\cot a'$ tirée de l'équation (7.), se change en

$$11. \quad \cot B\sin A\sin c'+\cos A-\frac{\cos c'}{\cos b'} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\cos b' = \frac{\cos c'}{\cos B\sin A\sin c'+\cos A}.$$

D'après l'équation (11.) on a encore dans le même triangle

$$\cot C\sin A\sin b'+\cos A-\frac{\cos b'}{\cos c'} = 0$$

et après y avoir substitué la valeur de $\cos b'$ qu'on vient de trouver,

$$\cot C\sin A\sin b'+\cos A = \frac{1}{\cot B\sin A\sin c'+\cos A}.$$

On en déduit l'équation

$$\cot C\sin b' = \frac{\sin A-\cot B\sin c'\cos A}{\cot B\sin A\sin c'+\cos A},$$

qui divisée par la valeur de $\cos b'$ donne

$$\cot c'\cot C\tang b' = \sin A-\cot B\sin c'\cos A.$$

En y substituant la valeur de $\tang b'$ tirée de l'équation (7.), après y avoir changé préalablement les lettres a', A contre c', C, on a

$$\sin c' \cos C = \sin A \sin B - \cos B \sin c' \cos A.$$

En divisant cette équation par $\sin c'$ et en changeant convénablement les lettres, on a enfin

$$12. \quad \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin a'}.$$

En y rassemblant toutes les équations (7.), (10.), (11.), (12.) nous avons donc

$$13. \quad \begin{cases} \tang a' \sin A - \tang b' \sin B = 0, \\ \cos A \cos b' \cos c' + \frac{\sin b' \sin c'}{\sin a'} - 1 = 0, \\ \cot A \sin B \sin c' + \cos B - \frac{\cos c'}{\cos a'} = 0, \\ \cos A + \cos B \cos C - \frac{\sin B \sin C}{\sin a'} = 0: \end{cases}$$

quatre équations où les lettres a', b', c' peuvent se permuter en même tems que leurs correspondantes A, B, C, et fournir de cette manière 15 équations qui toutes se rapportent à un triangle rectiligne dont les côtés a, b, c sont arbitraires.

Il en suit que si du nombre de ces 15 équations on n'en choisit que trois à volonté et de manière seulement qu'elles puissent servir à déterminer trois inconnues parmi les six quantités a, b, c, A, B, C, lorsque les trois autres sont regardées comme données, les 12 équations restantes y seront déjà comprises d'elles-même. Donc pour ravoir toutes les 15 équations dont nous parlons, on n'a par exemple qu'à garder la seconde seulement et la rapporter à tous les angles A, B, C indifféremment. Pour ne laisser pourtant aucun doute sur cela nous allons le démontrer comme il suit.

Si on met $a'\sqrt{-1}$, $b'\sqrt{-1}$, $c'\sqrt{-1}$ au lieu de a', b', c' et ensuite

$$\frac{1}{\cos a'}, \quad \sqrt{-1}.\tang a', \quad \sqrt{-1}.\sin a',$$

au lieu de

$$\sin a', \quad \cos a', \quad \cot a',$$

les équations (13.) se transforment en

$$14. \quad \begin{cases} \frac{\sin A}{\sin a'} - \frac{\sin B}{\sin b'} = 0, \\ \cos A \sin b' \sin c' + \cos b' \cos c' - \cos a' = 0, \\ \cos A \sin B + \cos B \cos c' - \cot a' \sin c' = 0, \\ \cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a' = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations connues de la trigonométrie sphérique et dont la vérité, comme je l'ai prouvé dans les mémoires cités, est indépendante de l'une ou de l'autre hypothèse sur la somme des angles dans un triangle rectiligne. Or on sait que la seconde des équations (14.) rapportée aux trois angles A, B, C, fournit à elle seule toutes les autres pour un triangle sphérique; il doit donc en être de même avec les équations (13.) qui toutes dérivent ainsi de la seconde d'entre elles. Après cela nous nous croyons en droit d'avancer que ce qui sera prouvé pour cette seconde équation, le sera de même pour les trois autres équations (13.).

Recherchons maintenant, si les équations (13.) suffisent pour tous les triangles rectilignes possibles. Or pour qu'un triangle rectiligne puisse exister, indépendemment de toute hypothèse sur la somme de ses angles, on n'a qu'à satisfaire à ces deux conditions: 1°. Les trois côtés peuvent être arbitraires, pourvu que la somme de deux côtés surpasse en grandeur la troisième; 2°. Deux côtés et l'angle entre eux peuvent être arbitraires. Cette dernière condition est déjà remplie dans la seconde des équations (13.), qui nous donne sur le champ

$$\sin a' = \frac{\sin b' \sin c'}{1-\cos b' \cos c' \cos A}.$$

Or il est clair que

$$1+2\sin\tfrac{1}{2}A^2 \cos b' \cos c' > \cos(b'-c')$$

et puis en soustrayant des deux côtés $\cos b' \cos c'$, on a

$$1-\cos b' \cos c' \cos A > \sin b' \sin c'.$$

Donc $\sin a' < 1$, donc la formation du triangle est possible quels que soient les côtés b', c' et leur angle d'inclinaison A.

Pour vérifier l'autre condition, nous commençons d'abord par poser la valeur de

$$\cos A = \frac{1}{\sin a'} \cdot \frac{\sin a' - \sin b' \sin c'}{\cos b' \cos c'},$$

qu'on tire aisement de la seconde des équations (13.). Après y avoir substitué les expressions pour les lignes trigonométriques, nous avons

$$\cos A = \frac{(e^b+e^{-b})(e^c+e^{-c})-2(e^a+e^{-a})}{(e^b-e^{-b})(e^c-e^{-c})}.$$

D'où l'on déduit en y mettant $a = b-c+\omega$:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(e^{2b+\omega}-1)(e^{2c-\omega}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}.$$

Supposons que $b \gtreqless 0$, et soit

$$e^{2b} = 1+\beta, \quad e^{2c} = 1+\gamma, \quad e^{\omega} = 1+\delta,$$

de sorte qu'on a nécessairement

$$\omega > 0, \quad \beta \gtreqless \gamma, \quad \gamma > \delta.$$

Après cela on trouve ces deux expressions pour $\cos\frac{1}{2}A^2$:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)\left[1+\frac{\delta}{\beta(1+\delta)}\right],$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = 1-\delta\left[\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta(\gamma+\delta)}\right]-\frac{\delta^2}{\beta\gamma(1+\delta)},$$

dont la première nous démontre que $\cos\frac{1}{2}A^2 > 0$, et la seconde que $\cos\frac{1}{2}A^2 < 1$; par conséquent la valeur de A aussi bien que celle de B et de C sont réelles.

Pour faire voir quelle est la somme des angles dans un triangle rectiligne, que les équations (13.) supposent, nous allons la calculer de la manière suivante. Reprenons la valeur de $\cos\frac{1}{2}A^2$ après y avoir mis $s = a+b+c$. Nous aurons

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(e^{s-2a}-1)(e^s-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}$$

puis

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{e^{s-2a}(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}.$$

Après cela on trouve aisement

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{e^s-1}{e^{2c}-1}e^{c-\frac{1}{2}s}\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{e^{\frac{1}{2}s-c}-e^{c}}{e^{2c}-1}\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = e^{\frac{1}{2}s-a}\frac{e^{s-2b}-1}{e^{2c}-1}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = e^{\frac{1}{2}s-b}\frac{e^{s-2a}-1}{e^{2c}-1}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = e^{-\frac{1}{2}s}\frac{e^s+e^c}{e^c+1}\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = e^{\frac{1}{2}s}\frac{e^{-a}+e^{-b}}{e^c+1}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{(1+e^{-a})(1+e^{-b})}{e^c+1}e^{\frac{1}{2}s}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C.$$

En mettant dans cette dernière équation les valeurs de $\sin\frac{1}{2}C$ et de $\cos\frac{1}{2}C$ d'après les formules pour $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, on obtient

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sqrt{[(e^s-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)]}}{(e^a+1)(e^b+1)(e^c+1)}:$$

expression dont la valeur est toujours réelle, comme nous l'avons prouvé

pour A, B, C séparément, et qui ne devient jamais zéro à moins que deux côtés du triangle ne coïncident avec le troisième. Donc $A+B+C<\pi$.

Passons à présent à la manière de mésurer les lignes courbes, les surfaces et le volume des corps.

Si l'on suppose les côtés a, b, c tellement petits qu'il serait permis de se contenter des valeur approchées de

$$\sin a' = 1 - \tfrac{1}{2}a^2, \quad \cos a' = a,$$

les équations (13.) deviennent en ce cas

$$15. \quad \begin{cases} b\sin A - a\sin B = 0, \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 0, \\ \sin(A+B) - \frac{c}{a}\sin A = 0, \\ \cos A + \cos(B+C) = 0, \end{cases}$$

dont les deux premières sont celles que la géométrie usitée admet pour les triangles rectilignes. Les deux dernières, si nous y remplaçons $\frac{c}{a}\sin A$ par $\sin C$ d'après la première équation, ne démontrent autre chose que la somme des angles dans un triangle rectiligne est $A+B+C=\pi$.

Après tout cela je me crois en droit de conclure:

1°. *Dans la théorie rien ne s'oppose à admettre que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit moindre que deux angles droits;*

2°. *Dans l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle moindre que deux angles droits, les équations* (13.) *peuvent être substituées aux équations ordinaires* (15.) *sans mener jamais à quelques résultats absurdes;*

3°. *La géométrie imaginaire est conçu sur un plan plus général que la géométrie usitée qui n'en est qu'un cas particulier, et qui en dérive dans la supposition des lignes extrêmement petites; de sorte que cette dernière géométrie n'est sous ce rapport qu'une géométrie différentielle;*

4°. *Les valeurs des élémens différentiels des lignes courbes, des surfaces, et du volume des corps sont les mêmes dans la géométrie imaginaire et dans la géométrie usitée;*

5°. *L'hypothèse de la somme des angles d'un triangle moindre que deux angles droits ne peut avoir d'application que dans l'analyse, puisque les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle la moindre déviation de deux angles droits.*

J'ai prouvé ailleurs, en m'appuyant sur quelques observations astronomiques, que dans un triangle dont les côtés sont de la même grandeur à peu près que la distance de la terre au soleil, la somme des angles ne peut jamais différer de deux angles droits d'une quantité qui puisse surpasser $0'',0003$ en secondes sexagésimales. Or cette différence doit être d'autant moindre que les côtés d'un triangle sont plus petits.

Pour donner quelques exemples de l'application de la géométrie imaginaire, je veux reproduire ici, et même d'une manière nouvelle, les expressions pour les élémens différentiels des surfaces et du volume des corps. Je dis d'une manière nouvelle, car dans mes premiers écrits, comme je l'ai déjà remarqué, je n'étais parvenu à ces expressions qu'à l'aide de considérations purement géométriques; au lieu qu'ici je ne veux me servir que du principe d'identité des portions élémentaires de l'espace dans les deux géométries. Mais pour atteindre le but que je me propose, j'ai besoin d'une proposition que je vais démontrer.

Soient x, y deux côtés d'un triangle rectangle (Fig. 3.), r son hypothénuse; α, β les angles opposés à x, y. On aura d'après les équations (1.), (4.), (5.):

$$16. \quad \sin r' = \sin x' \sin y',$$
$$17. \quad \cos x' = \cos r' \cos \beta,$$
$$18. \quad \operatorname{tang} \beta = \cos y' \operatorname{tang} x',$$
$$19. \quad \operatorname{tang} \alpha = \cos x' \operatorname{tang} y'.$$

Dans le plan des x et des y menons ξ perpendiculairement à x et du même côté que y. Du point d'intersection commun à y et r abaissons la perpendiculaire η à ξ, de sorte que les lignes y, x, ξ, η forment un quadrilatère dont les trois angles entre y et x, entre x et ξ entre ξ et η soient des angles droits. Dans le triangle rectangle dont les côtés sont ξ, η, l'hypothénuse r, nommons γ l'angle opposé à ξ, tandis que l'angle opposé à η sera $\frac{1}{2}\pi - \beta$. D'après les équations (1.), (4.) et (5.) nous aurons comme tout à l'heure:

$$20. \quad \sin r' = \sin \xi' \sin \eta',$$
$$21. \quad \cos \xi' = \cos r' \sin \beta,$$
$$22. \quad \cot \beta = \cos \eta' \operatorname{tang} \xi',$$
$$23. \quad \operatorname{tang} \gamma = \cos \xi' \operatorname{tang} \eta'.$$

Cependant les équations (16.) et (19.) nous donnent

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\cos \xi'}{\cos x'}.$$

En comparant cette valeur de $\operatorname{tang}\beta$ avec celle que les équations (18.), (22.) supposent, nous avons

$$24.\quad \cos x' = \cos\eta'\sin\xi',$$

$$25.\quad \cos\xi' = \cos y'\sin x'.$$

Et en comparent la valeur de $\sin r'$ dans les équations (16.) et (20.),

$$26.\quad \sin\xi'\sin\eta' = \sin x'\sin y'.$$

En éliminant ensuite ξ' des équations (24.) et (25.), nous trouvons

$$27.\quad \operatorname{tang}\eta' = \sin y'\operatorname{tang} x'.$$

Enfin les équations (19.), (23.) nous donnent

$$\operatorname{tang}(\alpha+\gamma) = \frac{\cos x'\operatorname{tang} y' + \cos\xi'\operatorname{tang}\eta'}{1-\cos x'\operatorname{tang} y'\cos\xi'\operatorname{tang}\eta'},$$

équation qui, après y avoir substitué les valeurs de $\cos\xi'$ et de $\operatorname{tang}\eta'$ tirées des équations (25.) et (27.), se change en celle-ci:

$$28.\quad \operatorname{tang}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{tang} y'}{\cos x'}.$$

Partageons à présent une surface plane S par des lignes γ (Fig. 4.) perpendiculaires à l'axe des x, de sorte que la distance de deux y consécutives soit mesurée par la différentielle dx sur l'axe des x. Partageons encore chaque portion de surface interceptée entre deux y consécutives, par les lignes z perpendiculairs à y et menées l'une de l'autre à la distance dy mesurée sur la ligne y. L'élement de surface quadrangulaire, interceptée entre deux y et entre deux z consécutives, sera le produit de son côté dy par le côté adjacent qu'on trouve d'après l'équation (27.) égale à $z = \frac{dx}{\sin y'}$. Ainsi cet élément sera

$$d^2S = \frac{dx\,dy}{\sin y'}.$$

Intégré par rapport à y depuis $y=0$, il devient

$$29.\quad dS = dx\cot y'.$$

Par exemple dans le trapèze que nous avons considéré plus haut et dont trois angles sont droits, nous avons eû l'équation (25.)

$$\cos\xi' = \cos y'\sin x'.$$

Par conséquent

$$dS = \frac{\cos\xi'.\,dx}{\sqrt{(\sin x'^2 - \cos\xi'^2)}}$$

ou bien

$$dS = -\frac{dx'\cos\xi'}{\sin x'\sqrt{(\sin x'^2-\cos\xi'^2)}}$$

Et en intégrant par rapport à x' depuis $x=0$ ou $x'=\frac{1}{2}\pi$, nous obtenons
$$S = -\arccos(\cot\xi'\cot x') + \tfrac{1}{2}\pi,$$
ce qui donne
$$\tang S = \frac{\cot\xi'\cot x'}{\sqrt{(1-\cot\xi'^2\cot x'^2)}}.$$
En y mettant la valeur de $\cos\xi'$, on a
$$\tang S = \cos x'\cot y'.$$
Cette expression pour $\tang S$ comparée avec celle de $\tang(\alpha+\gamma)$ dans l'équation (28.) fait voir que la surface du trapèze S est égale à l'excès de π sur la somme de ses quatre angles. J'ai démontré ailleurs cette proposition au moyen des constructions géométriques. On prouverait de même que la surface d'un polygone est égale au produit de $\frac{1}{2}\pi$ par le nombre de ses côtés moins la somme de ses angles.

Si l'on rapporte la position d'un point de la courbe à deux axes perpendiculaires qui se coupent à l'origine des coordonnées, et qu'on nomme y l'ordonnée perpendiculaire à l'axe des x (Fig. 3.), η celle qui est perpendiculaire à l'autre axe, celui des ξ, on a en même tems d'après l'équation (29.)
$$dS = dx\cot y',\quad dS = d\xi\cot\eta'.$$
Donc en égalant les deux valeurs de dS et en intégrant, on obtient
$$30.\quad \int dx\cot y' = \int d\xi\cot\eta,$$
pourvû que les deux intégrales s'étendent à toute la surface comprise entre la courbe et les deux axes des coordonnées x et ξ, c'est-à-dire que les intégrales doivent commencer avec $x=0$, $\xi=0$ et finir avec $y=0$, $\eta=0$. La dépendance mutuelle des quatre variables sous les signes d'intégration, est exprimée ici par les équations (25.) et (27.)
$$31.\quad \cos\xi' = \cos y'\sin x',$$
$$32.\quad \tang\eta' = \sin y'\tang x'.$$

Pour prouver analytiquement l'identité des deux intégrales (30.) qui n'a été établie jusqu'ici qu'à l'aide des considérations géométriques, on n'a qu'à remonter à la double intégrale
$$S = \iint\frac{dx\,dy}{\sin y'},$$
dont nous sommes partis, ou bien à l'intégrale
$$S = \iint\frac{dx'\,dy'}{\sin x'^2\sin y'^2}.$$

Effectivement, en différentiant l'équation (31.) par rapport à x' et ξ', nous avons

$$-\sin\xi' d\xi' = \cos y' \cos x' dx';$$

après cela

$$S = \iint \frac{\tang\xi' d\xi' dy'}{\cos x' \sin y'^2},$$

puis en éliminant x' dans les deux équations (31.), (32.)

$$\sin\eta' = \tang y' \cot\xi',$$

et en différentiant cette dernière équation par rapport à η', y',

$$\cos\eta' dy' = \frac{dy'}{\cos y'^2}\cot\xi'.$$

Le valeur de dy' tirée d'ici et substituée dans l'expression pour S, nous donne

$$S = -\iint \frac{\tang\xi'^2 \cos\eta' \cos y'^2}{\cos x' \sin y'^2} d\xi' d\eta'.$$

Or les équations (31.), (32.) produisent encore celle-ci:

$$\cos x' = \cos\eta' \sin\xi', \quad \tang y' = \sin\eta' \tang\xi',$$

à l'aide desquelles l'intégrale se transforme en cette autre:

$$S = -\iint \frac{d\xi' d\eta'}{\sin\xi'^2 \sin\eta'^2}.$$

Ainsi

$$\iint \frac{dx' dy'}{\sin x' \sin y'^2} = -\iint \frac{d\xi' d\eta'}{\sin\xi' \sin\eta'^2}.$$

En intégrant d'un côté par rapport à y' et de l'autre par rapport à η' depuis $y' = \frac{1}{2}\pi$, $\eta' = \frac{1}{2}\pi$, on aura en général

$$\int \frac{dx'}{\sin x'}\cot y' = -\int \frac{d\xi'}{\sin\xi'}\cot\eta' + C\xi.$$

Pour faire disparaître ici la constante on n'a qu'à commencer la première intégrale par la valeur de $x' = \frac{1}{2}\pi$ qui repond à $\eta' = \frac{1}{2}\pi$, comme le fait voir l'équation (32.) et pour laquelle la seconde intégrale devient zéro, tandis que $\xi' = \eta'$. Ainsi

$$\int_{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx'}{\sin x'}\cot y' = -\int_{\xi'} \frac{dz'}{\sin\xi'}\cot\eta'.$$

Si la première de ces deux intégrales finit avec $y' = \frac{1}{2}\pi$ ou, ce qui est la même chose, avec $x' = \eta'$, la seconde finira avec la valeur correspondante de $\xi' = \frac{1}{2}\pi$. On peut donc écrire

$$\int \frac{dx'}{\sin x'}\cot y' = \int \frac{d\xi'}{\sin\xi'}\cot\eta',$$

pourvû que les deux intégrales commencent avec $x' = \frac{1}{2}\pi$, $\xi = \frac{1}{2}\pi$ et finissent avec $y = \frac{1}{2}\pi$, $\eta' = \frac{1}{2}\pi$, ce qu'il falloit démontrer.

Dans un cercle dont le rayon est r, on a l'équation entre les coordonnées x, y d'après l'equation (16.)

$$\sin r' = \sin x' \sin y'.$$

Les coordonnées x prennent ici leur naissance au centre du cercle et sont mesurées sur l'axe des x, tandis que les coordonnées y sont perpendiculaires aux x hors du centre et là où les x finissent. On a donc

$$\cot y' = \sqrt{\left(\frac{\sin x'^2}{\sin y'^2} - 1\right)},$$

et après avoir substitué cette valeur de $\cot y'$ dans l'équation (29.), on aura l'élément de la surface du cercle

$$dS = dx\sqrt{\left(\frac{\sin x'^2}{\sin y'^2} - 1\right)},$$

ou autrement

$$dS = -\frac{dx'}{\sin x'}\sqrt{\left(\frac{\sin x'^2}{\sin y'^2} - 1\right)}.$$

En y mettant

$$\sin \psi = \operatorname{tang} r' \cot x',$$

on a

$$dS = \frac{\cos \psi^2 d\psi}{\operatorname{tang} r'^2 + \sin \psi'^2}.$$

En faisant encore

$$\cot \psi \sin r' = \cot \theta,$$

est en intégrant depuis $\psi = 0$ et $\theta = 0$, on trouve

$$S = \frac{\theta}{\sin r'} - \psi.$$

En multipliant cette équation par 4 et en posant $x' = r'$, ce qui donne $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on a l'expression pour la surface du cercle

$$4S = \pi(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2,$$

et si l'on différencie la valeur de $4S$ par rapport à r, on a la circonférence du cercle

$$33. \quad 4\left(\frac{dS}{dr}\right) = 2\pi \cot r'.$$

On eût trouvée la même chose, étant parti de l'expression

$$ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{dx^2}{\sin y'^2}\right)},$$

pour l'élément d'une ligne courbe en général.

Imaginons maintenant qu'un corps P soit divisé en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des x. Considérons une de ses tranches dont l'épaisseur infiniment petite dx et la distance au centre des coordonnées x,

soient mesurées sur l'axe des x. Dans le plan qui sépare la tranche et qui est situé du côté du centre des coordonnées, du bout de la ligne x menons une ligne y et divisons la tranche en prismes par des plans perpendiculaires à y. Le plan qui passe par x et y, dans son intersection avec un de ces prismes, produit un quadrangle qui sert de base au prisme et dont l'un des côtés est $\frac{dx}{\sin y'}$; supposons que celui qui est dans la direction des y soit infiniment petit dy. La surface de la base sera donc

$$\frac{dx\,dy}{\sin y'}.$$

Menons une ligne z perpendiculairement à cette base et partageons le prisme par des planes perpendiculaires aux z. Deux de ces plans infiniment rapprochés et dont l'un est situé à la distance z de la base et l'autre à la distance $z+dz$, enlevent dans le prisme une portion limitée par six plans et qu'on peut avec toute rigueur considérer comme un parallépipède dont les trois côtés perpendiculaires seront

$$dz, \quad \frac{dy}{\sin z'}, \quad \frac{dx}{\sin y' \sin z'}.$$

Le produit de ces trois lignes donnera donc

$$34. \qquad d^3P = \frac{dx\,dy\,dz}{\sin y' \sin z'^2},$$

élément différentiel du volume du corps P. L'intégration de cette expression par rapport à y depuis $y = o$, nous donne

$$d^2P = \frac{dx\,dz}{\sin z'^2} \cot y',$$

ou autrement

$$d^2P = \frac{dx'\,dz'}{\sin x' \sin z'^2} \cot y'.$$

Pour un globe dont le demidiamètre est r, on a

$$\sin r' = \sin x' \sin y' \sin z',$$

après cela

$$d^2P = \frac{dx'\,dz'}{\sin z'^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sin r'^2} - \frac{1}{\sin x'^2 \sin z'^2}\right)}.$$

Si l'on y fait

$$\cos\psi = \frac{\cot z' \sin r'}{\sqrt{(\sin x'^2 - \sin r'^2)}},$$

et qu'on intégrale ensuite par rapport à ψ, on trouve

$$dP = \frac{dx' \sin x'}{4 \sin r'^2} (2\psi - \sin 2\psi)\left(1 - \frac{\sin r'^2}{\sin x'^2}\right).$$

En étendant cette intégrale de $z = 0$ à $\sin z' \sin x' = \sin r'$, c'est-à-dire de $\psi = \frac{1}{2}\pi$ à $\psi = 0$, nous avons

$$dP = -\frac{\pi\, dx' \sin x'}{4 \sin r'^2}\left(1 - \frac{\sin r'^2}{\sin x'^2}\right),$$

et en intégrant de nouveau:

$$P = \frac{\pi}{4 \sin r'^2}(\cos x' - \sin r'^2 \log \cot \tfrac{1}{2} x').$$

En multipliant par 8 et en étendant cette intégrale au huitième du globe, c'est-à-dire de $x' = \frac{1}{2}\pi$ à $x' = r'$, nous avons enfin l'expression de ce volume

$$35. \quad P = \tfrac{1}{2}\pi(e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Le développement en série, si on pousse l'approximation jusqu'à r^3, donne

$$P = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

comme on l'a dans la géométrie usitée. Si l'on différencie l'expression (30.) de P par rapport à r et qu'on divise par dr, on a la surface de la sphère à rayon r

$$\left(\frac{dP}{dr}\right) = \pi(e^r - e^{-r})^2.$$

Considérons encore un point dont la position dans l'espace soit déterminée par des coordonnées x, y, z, de manière que x soit menée du centre des coordonnées, que y soit perpendiculaire à x là où x finit, que z soit perpendiculaire au plan des xy au point où y finit. Dans le triangle rectangle formé par x, y (Fig. 5.) nommons p l'hypothénuse, ω l'angle opposé à y. Dans le triangle pareil dont les côtés sont p, z soit r l'hypothénuse, θ l'angle opposé à z. D'après les équations (1.), (5.) on a ici

$$\sin r' = \sin p' \sin z', \quad \tang \omega = \cos y' \sin x',$$
$$\sin p' = \sin x' \sin y', \quad \tang \theta = \cos z' \tang p'.$$

Si l'on veut donc exprimer r, ω, θ par x, y, z, on a les équations

$$36. \quad \begin{cases} \sin r' = \sin x' \sin y' \sin z', \\ \tang \omega = \cos y' \tang x', \\ \sin \theta = \dfrac{1}{\cos r'} \sin x' \sin y' \cos z', \end{cases}$$

et si l'on veut exprimer x, y, z par r, ω, θ, on a

$$37. \quad \begin{cases} \cos x' = \cos r' \cos \omega \cos \theta, \\ \cot y' = \dfrac{\cos r' \sin \omega \cos \theta}{\sqrt{(1 - \cos r'^2 \cos \theta^2)}}, \\ \cot z' = \cot r' \sin \theta. \end{cases}$$

En faisant varier les angles θ, ω d'accroissemens infiniment petits $d\theta$, $d\omega$,

les rayons r, p décriront des arcs [voir l'équation (33.)]

$$d\theta \cot r', \quad da \cot p',$$

dont le second étant divisé par sin z' [v. l'équation (27.)], donnera l'arc que le rayon r d'écrit à cause de l'acroissement $d\omega$. Le produit des deux arcs infiniment petits que le rayon r parcourt ainsi, multiplié par dr, sera l'élément différentiel du volume P du corps. Donc

$$d^3P = dr\, d\omega\, d\theta \cot r' \frac{\cot p'}{\sin z'}.$$

Mais dans le triangle dont les côtés sont p, z, l'hypothénuse r, nous avons d'après les équations (3.), (5.)

$$\tang r' = \tang z' \sin\theta, \quad \tang\theta = \cos z' \tang p',$$

après quoi

$$38. \quad d^3P = \tfrac{1}{4} dr\, d\omega\, d\theta \cos\theta (e^r - e^{-r})^2.$$

On pourrait arriver à cette expression de d^3P en partant de celle que nous avons donnée plus haut (34.) et en se servant des équations (36.) ou (37.) pour la transformation des coordonnées d'après une méthode bien connue.

Proposons nous à présent d'évaluer le volume d'un cône à base plane. Nommons h sa hauteur, c son arête, et soit le pied de la hauteur en même tems le centre des coordonnées polaires, de sorte que r soit le rayon mené de ce centre à un point de l'arête, θ l'angle que le rayon r fait avec la base du cône, ω l'angle que la projection de r sur cette base fait avec une ligne fixe dans ce plan, menée du centre des coordonnées. Soit encore φ l'angle au sommet du cône entre les lignes h, c.

En intégrant l'équation (38.) par rapport à r et depuis $r = 0$, nous trouvons

$$39. \quad 2d^2P = \cos\theta\left(\frac{\cos r'}{\sin r'^2} - \log\cot\tfrac{1}{2}r\right) d\omega\, d\theta.$$

Dans le triangle dont h, r sont les côtés, φ l'angle opposé à r, $\frac{1}{2}\pi - \theta$ l'angle entre h, r, nous avons d'après la troisième des équations (13.)

$$\cos r' = \frac{\cos h'}{\cot\varphi \cos\theta \sin h' + \sin\theta};$$

après cela

$$2\left(\frac{d^2P}{d\omega\, d\theta}\right) = \frac{\cos h' \cos\theta (\cot\varphi \cos\theta \sin h' + \sin\theta)}{\cot\varphi \cos\theta (\sin h' + \sin\theta)^2 - \cos h'^2}$$

$$- \tfrac{1}{2}\cos\theta \log\left(\frac{\cot\varphi \cos\theta \sin h' + \sin\theta - \cos h'}{\cot\varphi \cos\theta \sin h' + \sin\theta - \sin h'}\right).$$

Cette équation multipliée par $d\theta$ et intégrée par rapport à θ depuis $\theta = 0$, donne

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \int \frac{\cos h' \sin h' \cot\varphi \, d\theta}{(\cot\varphi \cos\theta \sin h' + \sin\theta)^2 - \cos h'^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \sin\theta \log\left(\frac{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta + \cos h'}{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta - \cos h'}\right).$$

Si on fait ici $\cot\varphi \sin h' = \cot\lambda$ et qu'on étende l'intégration jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \sin h' \cos h' \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta \sin\lambda^2 \cot\varphi}{\sin(\theta-\lambda)^2 - \sin\lambda^2 \cos h'^2} - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos h'}{1-\cos h'}\right)$$

$$= -h + \frac{\cos\lambda}{2\sqrt{(1-\cos h'^2 \sin\lambda^2)}} \log \left\{ \frac{1 + \dfrac{\cos\lambda\cos h'}{\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}}{1 - \dfrac{\cos\lambda\cos h'}{\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}} \cdot \frac{1 + \dfrac{\sin\lambda^2\cos h'}{\cos\lambda\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}}{1 - \dfrac{\sin\lambda^2\cos h'}{\cos\lambda\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}} \right\}$$

$$= -h + \frac{\cos\lambda}{2\sqrt{(1-\cos h'^2\sin\lambda^2)}} \log\left(\frac{\cos\lambda + \cos h'\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}{\cos\lambda - \cos h'\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2)}}\right).$$

Cependant la valeur supposée de $\cot\lambda$ nous donne

$$\sqrt{(1-\sin\lambda^2\cos h'^2} = \frac{\sin h'}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos h'^2)}}, \qquad \cos\lambda = \frac{\cos\varphi \sin h'}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos h'^2)}}.$$

Après quoi on obtient

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \tfrac{1}{2}\cos\varphi \log\left(\frac{\cos\varphi + \cos h'}{\cos\varphi - \cos h'}\right) - h.$$

Dans le triangle rectangle dont les côtés sont h, c et l'angle entre ceux-ci est φ, nous avons d'après l'équation (4.)

$$40. \qquad \cos h' = \cos c' \cos\varphi,$$

par conséquent

$$41. \qquad 2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = c\cos\varphi - h.$$

Si la base du cône est un cercle, les quantités c et φ sont constantes Dans ce cas l'intégration par rapport à ω depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$ donne le volume d'un cône droit à base circulaire

$$P = \pi(c\cos\varphi - h).$$

Si on y met la valeur de h tirée de l'équation (40.), on a

$$P = \pi\left\{c\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\varphi\cos c'}{1-\cos\varphi\cos c'}\right)\right\},$$

ou bien

$$P = \pi\left\{c\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\frac{1}{2}\varphi^2(e^{2c}-1)}{1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2(e^{2c}-1)}\right)\right\}.$$

En poussant l'approximation jusqu'à c^3 on trouve

$$P = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi^2 \cos\varphi,$$

valeur du cône comme on la trouve dans la géométrie usitée.

Au reste quelle que soit la figure de la base, l'équation (41.) nous donne toujours le volume du cône

$$42. \qquad P = \tfrac{1}{3}\int(c\cos\varphi - h)\,d\omega,$$

où c est l'arête du cône, h sa hauteur, φ l'angle entre c et h, ω l'angle qu'un plan passant par h et c décrit autour de h, l'intégrale s'étendant à la base entière.

Reprenons encore l'expression (39.)

$$2\left(\frac{d^2P}{d\omega\, d\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{\cos r'}{\sin r'^2} - r\right).$$

Si c'est au sommet du cône que les lignes r (Fig. 7.) prennent à présent leur origine et que θ soit l'angle entre r et sa projection p sur un plan qui passe par la hauteur h et dans lequel l'angle ω est compté de la ligne h, on aura dans le triangle rectangle dont les côtés p, r interceptent l'angle θ, d'après l'équation (4.)

$$43. \qquad \cos r'\cos\theta = \cos p'.$$

En mettant la valeur de $\cos r'$ tirée de cette dernière équation, dans l'expression de d^2P, nous avons

$$4\left(\frac{d^2P}{d\omega\, d\theta}\right) = \frac{2\cos p'\cos\theta^2}{\cos\theta^2 - \cos p'^2} - \cos\theta\log\left(\frac{\cos\theta + \cos p'}{\cos\theta - \cos p'}\right),$$

et en multipliant par $d\theta$, puis en intégrant par rapport à θ depuis $\theta = 0$,

$$4\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{1}{\sin p'}\log\left(\frac{1 + \cot p'\operatorname{tang}\theta}{1 - \cot p'\operatorname{tang}\theta}\right) - \sin\theta\log\left(\frac{\cos\theta + \cos p'}{\cos\theta - \cos p'}\right).$$

En faisant joindre les bouts des lignes p et h, p et r, r et h par des lignes x, y, ϱ dont les deux premières sont perpendiculaires entre elles, nous avons pour les deux triangles rectangles auxquels p sert de côté commun, d'après les équations (1.), (5.)

$$\sin p' = \sin h'\sin x', \qquad \operatorname{tang}\omega = \cos x'\operatorname{tang}h', \qquad \operatorname{tang}\theta = \cos y'\operatorname{tang}p'.$$

A l'aide de ces équations et en profitant de l'équation (43.) nous trouvons

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{y}{\sin h'\sin x'} - r\sin\theta.$$

Et si nous ne voulons retenir que les variables x', y' et qu'à cet effet nous substituons [v. les équations (36.)]

$$\cos r' = \sqrt{(1 - \sin h'^2\sin x'^2\sin y'^2)},$$

$$\sin\theta = \frac{\sin h'\sin x'\cos y'}{\cos r'},$$

$$d\omega = -\frac{dx'\sin x'\sin h'\cos h'}{1 - \sin h'^2\sin x'^2},$$

nous trouvons

$$dP = -\tfrac{1}{2}\cos h' \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin h'^2 \sin x'^2} + \sin h'^2 \cos h' \frac{2\,dx'.r\cos y' \sin x'^2}{\cos r'(1-\sin h'^2 \sin x'^2)}.$$

Cette expression de dP, intégrée depuis $x' = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à ce que y' devient $\frac{1}{2}\pi$, donne la partie du cône interceptée entre deux plans perpendiculaires passant par la hauteur h. En même tems l'équation (42.) nous fournit une autre expression pour ce quart du cône; c'est-à-dire

$$P = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (r\cos\varphi - h)\,d\psi,$$

où φ est l'angle entre r et h, ψ l'angle opposé à y dans le triangle rectangle dont les côtés sont x, y. La dépendance mutuelle des variables qui entrent dans les deux expressions est déterminée par les équations

$$\sin r' = \sin h' \sin x' \sin y', \qquad \operatorname{tang}\psi = \cos y' \operatorname{tang} x', \qquad \cos r' \cos\varphi = \cos h'.$$

Si la base du cône est un cercle dont le rayon est ϱ, les quantités ϱ, r, φ sont des constantes, et on a

$$44. \qquad \sin\varrho' = \sin x' \sin y', \qquad P = \tfrac{1}{4}\pi(r\cos\varphi - h),$$

et l'autre expression pour P sera

$$45. \qquad P = \tfrac{1}{2}\cos h' \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin h'^2 \sin x'^2} + \frac{r\sin h'^2 \cos h'}{2\cos r'} \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \cos y' \sin y'^2}{1-\sin h'^2 \sin x'^2}.$$

Puis on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \cos y' \sin x'^2}{1-\sin h'^2 \sin x'^2} &= \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \sin x' \sqrt{(\cos\varrho'^2 - \cos x'^2)}}{1-\sin h'^2 \sin x'^2} \\ &= \cos\varrho'^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dz \sin z^2}{\cos h'^2 + \sin h'^2 \cos\varrho'^2 \cos z^2} \\ &= \frac{\pi(\cos r' - \cos h')}{2\cos h' \sin h'^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent l'une des valeurs de P sera

$$P = \tfrac{1}{2}\cos h' \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin h'^2 \sin r'^2} + \frac{\pi r(\cos h' - \cos r')}{4\cos r'},$$

et l'autre

$$P = \tfrac{1}{4}\pi r\left(r\frac{\cos h'}{\cos r'} - 1\right).$$

La comparaison de ces deux valeurs donne

$$\int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin h'^2 \sin x'^2} = \tfrac{1}{2}\pi(r-h).$$

Après y avoir mis la valeur de x' en y' et rejeté les accens sur les lettres, on a

$$46. \qquad \int_{\varrho}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin y \cos y \log\cot\frac{1}{2}y\,dy}{(\sin y^2 - \sin r^2)\sqrt{(\sin y^2 - \sin\varrho^2)}} = \frac{\pi\log(\cot\frac{1}{2}h \operatorname{tang}\frac{1}{2}r)}{2\sin\varrho\cos h},$$

où $\sin r = \sin h \sin\varrho$. Cette intégrale définie n'a pas encore été remarquée, il me semble, dans toute sa généralité. On en trouve quelques cas par-

ticuliers dans le supplément aux Exercices de calcul intégral par *Legendre.* Quoique nous ne soyons parvenu à la connaissance de l'intégrale (46.) qu'à l'aide de la géométrie imaginaire, néanmoins cette voie indique déjà le moyen d'y arriver analytiquement. Au reste on peut trouver cette intégrale d'une manière plus courte, en considérant la double intégrale

$$\iint \frac{dp\, d\varphi \sin\varphi^2}{(1-p^2\sin\varphi^2)(1-n^2\sin\varphi^2)},$$

prise depuis $p=0$, $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, tandis que l'autre valeur de p qui doit servir de limite reste indéterminée. Après l'intégration, une fois par rapport à p, et une autre fois par rapport à φ, il faut y mettre

$$\sin\varphi = \frac{\cos y}{\cos\varrho}, \quad p=\cos\varrho, \quad n=\frac{\cos\varrho}{\cos r}.$$

L'équation (46.) après la substitution de

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{(\sin y^2-\sin\varrho^2)}}{\sin\varrho\cos h}, \qquad \sin\gamma=\frac{\cos\varrho}{\cos r},$$

et qu'on a intégré par parties, nous donne

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi \sin\varphi}{(1-\sin h^2\sin\varphi^2)\sqrt{(\sin\gamma^2-\sin\varphi^2)}} = \frac{\pi\log\left(\frac{\cos h+\sqrt{(1-\sin\gamma^2\sin h^2)}}{2\cos\gamma\cos\frac{1}{2}h^2}\right)}{2\cos h\sqrt{(1-\sin\gamma^2\sin h^2)}}.$$

La valeur de cette dernière intégrale se laisse développer en une série ordonnée suivant les puissances de $\sin h$ et où le coëfficient de $\sin h$ avec l'exposant n entier et positif est toujours moindre que

$$\tfrac{1}{2}\pi\sin\gamma^n\log\frac{1}{\cos\gamma}.$$

Par conséquent la valeur de l'intégrale dont nous parlons, reste aussi vraie lorsqu'on y met $\frac{1}{\sin h}$ au lieu de $\sin h$ et qu'on regarde en même tems $\sin h > \sin\gamma$. En passant ensuite des quantités imaginaires aux quantités réelles, on trouve

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi\sin\varphi}{(\sin h^2-\sin\varphi^2)\sqrt{(\sin\gamma^2-\sin\varphi^2)}} = \frac{\pi\left[h-\arccos\left(\frac{\cos h}{\cos\gamma}\right)\right]}{2\cos h\sqrt{(\sin h^2-\sin\gamma^2)}}.$$

Pour $h=\frac{1}{2}\pi$ les deux intégrales deviennent identiquement

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{(\sin\gamma^2-\sin\varphi^2)}} = \frac{\pi\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma}.$$

Dans l'expression (44.) pour le volume du cône droit à base circulaire, si l'on introduit d'autres quantités qui se rapportent au cône, comme

le rayon ρ de la base et l'angle α que le rayon ρ forme avec l'arête r, on a d'après les équations (4.) et (5.)

$$\cos r' \cos\alpha = \cos\rho', \qquad \operatorname{tang}\alpha = \cos h' \operatorname{tang}\rho'$$

et puis, en multipliant l'équation (44.) par 4 pour avoir le volume du cône entier,

$$P = \tfrac{1}{2}\pi\Big[\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\log\Big(\frac{\cos\alpha+\cos\rho'}{\cos\alpha-\cos\rho'}\Big)-\log\Big(\frac{\operatorname{tang}\rho'+\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\rho'-\operatorname{tang}\alpha}\Big)\Big],$$

ou bien

$$\frac{2}{\pi}P = \frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\log[\cot\tfrac{1}{2}(\rho'+\alpha)\cot\tfrac{1}{2}(\rho'-\alpha)]-\log\frac{\sin(\rho'+\alpha)}{\sin(\rho'-\alpha)}.$$

A mesure que la hauteur h du cône augmente, l'angle α augmente aussi et s'approche de ρ' jusqu'à rendre enfin la différence $\rho'-\alpha$ insensible. Dans ce cas et en ne retenant que la première puissance de $\rho'-\alpha$, nous avons

$$\frac{2}{\pi}P = \frac{\rho'-\alpha}{\sin\alpha}\log(\rho'-\alpha)-2\pi\log\sin\alpha,$$

et pour $h=\infty$:

$$P = -\pi\log\sin\alpha.$$

Pour tout autre cône infini, mais dont la base n'est pas un cercle, on a donc

$$47. \qquad P = -\tfrac{1}{2}\int d\omega\log\sin\alpha,$$

où ω est l'angle que le plan passant par l'axe du cône décrit autour de cet axe, et α est l'angle que l'arête du cône fait avec sa projection sur le plan de la base.

De l'autre côté en supposant toujours $h=\infty$ et par conséquent $h'=0$, l'équation (45.) nous donne

$$P = \tfrac{1}{2}\int dx'\log\cot\tfrac{1}{2}y'.$$

En égalant les deux expressions de P, nous avons à cause de $\rho'=\alpha$

$$48. \qquad \int d\omega\log\sin\rho' = \int dx'\log\cot\tfrac{1}{2}y',$$

où les limites de la première intégrale étant $\omega=0$ et $\omega=\frac{1}{2}\pi$, celles de l'autre doivent repondre à $y'=\frac{1}{2}\pi$, $x'=\frac{1}{2}\pi$. Ici la dépendance des quantités qui entrent sous les signes d'intégration est déterminée au moyen du triangle rectangle dont x, y sont les côtés, ρ l'hypothénuse, ω l'angle opposé à y. Par conséquent d'après les équations (1.), (5.) on a

$$\sin\rho' = \sin x'\sin y', \qquad \operatorname{tang}\omega = \cos y'\operatorname{tang}x'.$$

Lorsque la base du cône est un cercle, le rayon ρ est une constante, et

$$dx' = -\frac{dy'\cot y'\sin\rho'}{\sqrt{(\sin y'^2-\sin\rho'^2)}}.$$

Après cela

$$\frac{\pi \log \sin \varrho'}{\sin \varrho'} = \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy' \cot y' \log \cot \frac{1}{2} y'}{\sqrt{(\sin y'^2 - \sin \varrho'^2)}},$$

où ϱ' est une constante arbitraire. Cette intégrale est déjà comprise, comme un cas particulier, dans l'intégrale plus générale (46.) et quand on suppose dans celle-ci r, h infiniment petites.

Dans l'équation (48.) y' est une fonction arbitraire de x' qui n'est limitée que par la seule condition de rendre la valeur de x' réelle, lorsque $y' = \frac{1}{2}\pi$. Par exemple, supposons

$$\sin \alpha^2 = \sin x'^2 \sin y'^2 + \sin \beta^2 \cos x'^2,$$

où α, β sont des constantes. Après cela nous trouvons

$$\sin \varrho^2 = \frac{\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}{1 - \sin \beta^2 \cos \omega^2},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{(\sin \alpha^2 - \sin \beta^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log\left(\frac{\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}{1 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}\right)$$

$$= \int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy \cos y \sin y \log \cot \frac{1}{2} y}{(\sin y^2 - \sin \beta^2)\sqrt{(\sin y^2 - \sin \alpha^2)}}.$$

En substituant ici la valeur de la seconde intégrale que nous avons trouvée plus haut (46.), on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log\left(\frac{\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}{1 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}\right) = \pi \log (\cot \tfrac{1}{2}\gamma \tang \tfrac{1}{2}\beta),$$

où $\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$. On en conclut, quels que soient les angles $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\beta < \frac{1}{2}\pi$, que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log\left(\frac{1 - \sin \alpha^2 \cos \omega^2}{1 - \sin \beta^2 \cos \omega^2}\right) = 2\pi \log\left(\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta}\right).$$

En intégrant par parties on en déduit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\omega d\omega \sin \omega \cos \omega}{(1 - \sin \alpha^2 \cos \omega^2)(1 - \sin \beta^2 \cos \omega^2)} = \frac{\pi}{\cos \alpha^2 - \cos \beta^2} \log\left(\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta}\right),$$

ou encore

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega d\omega \sin \omega}{(1 - \cos \alpha \cos \omega)(1 - \cos \beta \cos \omega)} = \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \log\left(\frac{1 + \tang \frac{1}{2}\alpha}{1 + \tang \frac{1}{2}\beta}\right).$$

Pour $\alpha = \beta$ cette intégrale se réduit à

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega d\omega \sin \omega}{(1 - \cos \alpha \cos \omega)^2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{\sin \alpha \cos \frac{1}{2}\alpha \sin (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)},$$

qu'on peut vérifier sur le champ, en y mettant $\pi - \alpha$ et $\pi - \omega$ au lieu de α et ω.

Dans l'équation (42.) qui donne

$$dP = \tfrac{1}{2} d\omega (c \cos \varphi - h),$$

expression de l'élément différentiel d'un cône droit où h est la hauteur du

cône, c sont arête, φ l'angle entre c et h, ω l'angle que le plan passant par h décrit autour de cette ligne. Supposons à présent que la base soit un triangle rectangle dont les côtés sont x, y (Fig. 8.) et ω l'angle opposé à y dans ce triangle. Dans ce cas le cône dévient une pyramide dont le volume sera

$$P = \tfrac{1}{2}\int d\omega(c\cos\varphi - h)$$

On peut prendre aussi la ligne y pour la hauteur de cette pyramide et pour sa base le triangle dont les côtés sont x, h. En nommant donc ψ l'angle entre 0 et y, θ l'angle de la base opposé à h, on a de même

$$P = \tfrac{1}{2}\int d\theta(c\cos\psi - y).$$

En comparant les deux intégrales on conclut que

$$\int_0 d\omega(c\cos\varphi - h) = \int_0 d\theta(c\cos\psi - y).$$

Dans la première de ces intégrales c'est h qui est une constante, dans l'autre c'est y, tandis que ω, c, φ, θ, ψ varient. La dépendance de toutes ces quantités entre elles est déterminée par les équations suivantes où p, q représentent les lignes qui joignent x avec y, x avec h:

$$\begin{aligned}
&\cos c'\cos\varphi = \cos h', && \cos c'\cos\psi = \cos y',\\
&\sin c' = \sin h'\sin p', && \sin c' = \sin y'\sin q',\\
&\operatorname{tang} p' = \sin y'\sin\omega, && \operatorname{tang} q' = \operatorname{tang} h'\sin\theta,\\
&\operatorname{tang} c' = \operatorname{tang} p'\sin\varphi, && \operatorname{tang} c' = \operatorname{tang} q'\sin\psi,\\
&\cos p'\cos\omega = \cos x', && \cos q'\cos\theta = \cos x',\\
&\operatorname{tang}\omega = \cos y'\operatorname{tang} x', && \operatorname{tang}\theta = \cos h'\operatorname{tang} x'.
\end{aligned}$$

Si $y = \infty$, alors, comme on a vu plus haut [v. l'équat. (47.)],

$$49. \quad P = -\tfrac{1}{2}\int d\theta \log\sin q',$$

ou bien, à cause de $\cos q'\cos\theta = \cos x'$,

$$50. \quad P = \tfrac{1}{4}\int_0 d\theta \log\frac{\cos\theta^2}{\sin(x'-\theta)\sin(x'+\theta)}.$$

Mais on peut évaluer P encore d'une autre manière. Si nous différentions l'équation (49.) deux fois par rapport à θ et à q', nous avons

$$d^2P = -\tfrac{1}{2}d\theta dq'\cot q',$$

puis

$$dq'\cot q' = \frac{dx'\sin x'\cos x'}{\cos\theta^2 - \cos x'^2}.$$

Par conséquent

$$d^2P = -\tfrac{1}{2}\frac{d\theta dx'\sin x'\cos x'}{\cos\theta^2 - \cos x'^2}.$$

L'intégration de cette équation par rapport à θ et depuis $\theta = 0$, donne

$$51. \quad dP = -\tfrac{1}{2}\, dx' \log\left(\frac{1+\cot x' \operatorname{tang}\theta}{1-\cot x' \operatorname{tang}\theta}\right),$$

et à cause de $\cot x' \operatorname{tang}\theta = \cos h'$,

$$52. \quad P = \int^{\frac{1}{2}\pi} h\, dx'.$$

En mettant ici la valeur de x' en h et θ, nous trouvons

$$P = 2\sin 2\theta \int_{\cdot}^{\cdot} \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\theta}.$$

La comparaison de ces différentes expressions (50.), (51.), (52.) pour P nous conduit donc à établir l'égalité des intégrales suivantes:

$$\int_0^{\theta} d\theta \log \frac{\cos\theta^2}{\sin(x'-\theta)\sin(x'+\theta)} = \int_{x'}^{\frac{1}{2}\pi} dx' \log\frac{\sin(x'+\theta)}{\sin(x'-\theta)},$$

$$\int_{x'}^{\frac{1}{2}\pi} dx' \log\frac{\sin(x'+\theta)}{\sin(x'-\theta)} = \sin 2\theta \int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\theta}.$$

Pour démontrer la première de ces équations on n'a qu'à intégrer deux fois: par rapport à θ et à x'. La seconde équation se vérifie par la substitution de la valeur de h en x' et θ, c'est-à-dire

$$h = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin(x'+\theta)}{\sin(x'-\theta)}.$$

Supposons encore que la base du cône soit un quadrilatère dont les côtés y, x, ξ, η (Fig. 5.) sont perpendiculaires l'un à l'autre dans l'ordre de leur succession. La hauteur de ce cône soit infinie et perpendiculaire à la base au point de jonction des lignes x, ξ. Le volume du cône sera exprimé d'après l'équation (52.) par l'intégrale

$$P = -\int y\,dx'.$$

En même tems le volume de ce cône sera composé de ceux des deux autres auxquels les triangles formés par x et y avec leurs angles β, $\frac{1}{2}\pi-\beta$ opposés à y, η, servent de bases. Par conséquent

$$P = 2\sin 2\beta \int_{\cdot}^{\cdot} \frac{y\,dy}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2\beta} + 2\sin 2\beta \int_{\cdot}^{\cdot} \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta}+e^{-2\eta}+2\cos 2\beta}.$$

De sorte que

$$\frac{1}{2\sin 2\beta}\int^{\frac{1}{2}\pi} y\,dx' = \int_0^{\cdot} \frac{y\,dy}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2\beta} + \int^{\cdot} \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta}+e^{-2\eta}+2\cos 2\beta},$$

où les quantités β, y, x, η sont liées par les équations (18.), (25.), (27.), c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\beta = \cos y' \operatorname{tang} x', \qquad \cos\xi' = \cos y' \sin x', \qquad \operatorname{tang}\eta = \sin y' \operatorname{tang} x'.$$

En regardant β, ξ' comme des constantes et en différentiant dans

cette supposition la seconde de ces équations, nous avons

$$dx' = dy' \operatorname{tang} x' \operatorname{tang} y'.$$

Ensuite

$$dx' = -\operatorname{tang}\beta \frac{dy}{(e^y - e^{-y})^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{2}{\cos\beta^2}\int_\xi^y \frac{y\,dy}{(e^y-e^{-y})^2} = \int_0 \frac{y\,dy}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2\beta} + \int_0 \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta}+e^{-2\eta}+2\cos 2\beta},$$

où

$$\operatorname{tang}\eta = \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang} y', \qquad \cos\xi' = \frac{\cos y'}{\sqrt{(1+\cos y'^2 \cot\beta^2)}},$$

ce qui veut dire

$$\eta = \log[\tfrac{1}{2}\cot\beta(e^y - e^{-y}) + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\cot\beta^2(e^y-e^{-y})^2+1)}],$$

$$\xi = \log\left[\frac{(e^y-e^{-y})\sin\beta + \sqrt{[4\sin\beta^2 + (e^y-e^{-y})^2]}}{\sqrt{[4\sin\beta^2 + \cos\beta^2(e^y-e^{-y})^2]}}\right].$$

Lorsque y devient infini, η le sera de même, mais alors

$$\xi = \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\beta),$$

$$\int_\xi^\infty \frac{y\,dy}{(e^y-e^{-y})^2} = \cos\beta^2 \int_0^\infty \frac{y\,dy(e^{2y}+e^{-2y})}{e^{4y}+e^{-4y}-2\cos 4\beta}.$$

Nous avons trouvé plus haut que

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} y\,dx' = 4\operatorname{tang}\beta \int_0 \frac{y\,dy}{(e^y-e^{-y})^2}.$$

Mais si dans la première de ces deux intégrales on substitue la valeur de y tirée de l'équation

$$\cos\xi' = \cos y' \sin x',$$

on aura

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} y\,dx' = \tfrac{1}{2}\int^{\frac{1}{2}\pi} dx' \log\left(\frac{\sin x' + \cos\xi'}{\sin x' - \cos\xi'}\right) = \tfrac{1}{2}\int dx' \log\left(\frac{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi')}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi)}\right).$$

La dernière intégrale est la valeur de

$$\int du \log\operatorname{tang} u - \int dv \log\operatorname{tang} v,$$

les intégrales étant ici prises de $u = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi'$ jusqu'à $u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\xi$ et de $v = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi$ jusqu'à $v = \frac{1}{2}\xi'$. Or à ces deux intégrales on peut ajouter encore celle-ci

$$\int du \log\operatorname{tang} u = 0 \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\xi', \\ u = \frac{1}{2}\xi'. \end{cases}$$

Après cela les trois intégrales se reunissent en une seule $\int du \log\operatorname{tang} u$, prise entre les limites $u = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi$, $u = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi'$, ou ce qui revient au même,

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}}$$

depuis $z = \log\cot(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi')$ jusqu'à $z = \log\cot(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi)$.

Après cela nous avons donc

$$\int y\,dx' = \tfrac{1}{2}\int \frac{s\,ds}{e^s+e^{-s}},$$

$$\frac{1}{4\sin 2\beta}\int \frac{s\,ds}{e^s+e^{-s}} = \int_0 \frac{y\,dy}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2\beta} + \int_0 \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta}+e^{-2\eta}+2\cos 2\beta},$$

les limites de la premièrė intégrale dans cette dernière équation restant les mêmes. Lorsque $y=\infty$, $\eta=\infty$, on a $x'=\frac{1}{2}\beta$, $\xi'=\frac{1}{2}\pi-\beta$ et l'on trouve que

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{s\,ds}{e^s+e^{-s}} = 2\sin\alpha\int_0^{\infty} \frac{y\,dy\,(e^y+e^{-y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2\alpha},$$

où α est une constante et où la première intégrale commence avec $s=\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

On pourrait beaucoup multiplier les exemples d'application de la géométrie imaginaire à la recherche des intégrales, mais ce que j'ai dit jusqu'à présent suffit, je crois, pour ne plus laisser de doute sur la vérité des principes établis et pour reconnaitre quelque utilité de cette nouvelle branche de la géométrie.

Je puis faire encore une remarque assez importante pour l'étude des intégrales, c'est que toute intégrale indéterminée qui a l'une de ces deux formes

$$\int \frac{dx\sin x\log\cot\frac{1}{2}x}{(a^2-\sin x^2)\sqrt{(b^2-\sin x^2)}}, \qquad \int \frac{x\,dx\sin x}{(a^2-\sin x^2)\sqrt{(b^2-\sin x^2)}},$$

où a, b sont des constantes, peut être toujours ramenée aux intégrales de la forme $\int dx\log\cos x$. On parvient à ce résultat en considérant, d'après les principes de la géométrie imaginaire, le volume d'une pyramide dont la base est un triangle, et en reproduisant cette pyramide par la combinaison de celles dont la hauteur est infinie.

19.
Ueber eine elementare Entwickelungsweise der einfachsten transcendenten Functionen.

(Vom Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

§. 1.

Diese Abhandlung hat hauptsächlich zum Zweck, zu zeigen, wie auf eine anschauliche Weise in der ersten Classe unserer Gymnasien die Reihen für die Exponentialgröfsen und Logarithmen, so wie für die Sinus und Cosinus entwickelt werden können.

Nachdem man die allgemeine Bedeutung einer rechtwinkligen Spirale gezeigt hat, so wie sie p. 363 des 16ten Bandes dieses Journals entwickelt worden ist, geht man zu der Fig. 9. über, in welcher $AF = FG = \ldots SB = p$ gleiche Sehnen eines Kreises darstellen mögen, dessen Mittelpunct C und dessen Radius $AC = r$ ist. Man verlängere alle diese Sehnen nach der rechten Seite hin und bestimme auf den Verlängerungen die Puncte $K, L, M, \ldots T$ so, dafs $FK = FA$, $GL = GK$, $HM = HL, \ldots ST = SD$ wird. Verbindet man diese Puncte zu dem Polygon $AKLM \ldots T$, und nimmt ähnliche Verlängerungen mit den Seiten desselben vor, so dafs $KM = KA$ wird, $LQ = LR$, $MP = MQ \ldots$ $DE = DO$, so erhält man abermals ein Polygon durch Verbindung der Puncte $A, R, Q, \ldots E$. Jetzt kann man wieder die Seiten $QR, PQ, \ldots EO$ verlängern und ganz auf dieselbe Weise ein neues Polygon bilden, und überhaupt mit dieser Construction fortfahren und Polygone zeichnen, deren Seitenzahl stets um Eins abnimmt, und die alle vom Puncte A auslaufen; das letzte derselben reducirt sich dann auf eine einzige Gerade. Die auf solche Art in der Zeichnung erhaltenen Dreiecke sind sämmtlich gleichschenklig und alle einander ähnlich. Hat man beim Kreispolygone n Seiten angewandt, von denen jede gleich p war, so ist die Länge des Polygons AB gleich np. Da die Dreiecke AFC und AFK ähnlich sind, so ist

$$AK:AF = AF:AC \quad \text{oder} \quad AK:p = p:r,$$

folglich

$$AK = \frac{p^2}{r}, \quad KL = 2\frac{p^2}{r}, \quad LM = 3\frac{p^2}{r}, \quad \ldots \quad TD = (n-1)\frac{p^2}{r},$$

also

$$AF = (1+2+3+\cdots+n-1)\frac{p^2}{r} = \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{p^2}{r}.$$

Ferner verhält sich

$$AR:AN = AF:AC \quad \text{oder} \quad AR:\frac{p^2}{r} = p:r,$$

folglich ist

$$AR = \frac{p^3}{r^2},\quad RQ = \frac{2.3}{1.2}\cdot\frac{p^3}{r^2},\quad QP = \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{p^3}{r^2},\ \ldots\ OE = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{p^3}{r^2},$$

also

$$AE = \left(\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\right)\frac{p^3}{r^2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{p^3}{r^2}.$$

Offenbar würde

$$\left(\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\right)\frac{p^4}{r^3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{p^4}{r^3}$$

die Länge des folgenden Polygons sein. Bezeichnet man durch S die Summe des Radius r und aller dieser n Polygone, so erhält man

$$1.\quad S = r+np+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{p^2}{r}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{p^3}{r^2}+\cdots+\frac{p^n}{r^{n-1}} = r\left(1+\frac{p}{r}\right)^n.$$

Hätte man an BT noch ein $n$tes ähnliches Dreieck gelegt, so würde statt AT ein Polygon von n Seiten entstanden sein; eben so hätte sich aus diesem statt AE auch ein Polygon von n Seiten ableiten lassen, und überhaupt jedes folgende konnte mit einer gleichen Seitenzahl gezeichnet werden. In diesem Falle endete die Construction nie, und man erhält als die Summe des Radius und aller dieser unendlich vielen Polygone

$$2.\quad S' = r+np+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{p^2}{r}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{p^3}{r^2}+\cdots = r\left(1-\frac{p}{r}\right)^{-n}.$$

Die geometrische Bedeutung solcher Binome zu kennen ist oft nicht ohne Interesse.

§. 2.

Setzt man nun die Länge der gebrochenen Linie $AFG \ldots B = \lambda$, so ist

$$p = \frac{\lambda}{n},$$

und man erhält aus (1.)

$$1.\quad S = r\left(1+\frac{\lambda}{nr}\right)^n \quad \text{und aus (2.)} \quad S' = r\left(1-\frac{\lambda}{nr}\right)^{-n},$$

wo die zweite aus der ersten Formel entspringt, wenn man n negativ nimmt. Je gröfser n, desto kleiner werden die Seiten des Kreispolygons AB und desto mehr schliefst sich λ an den Kreisbogen AB an, bis es

endlich für ein unendlich grofses n mit diesem zusammenfällt. Bezeichnet man den Winkel ACB durch α, so ist in diesem Falle

$$\lambda = r\alpha,$$

daher, wenn wir diesen besonderen Werth von S durch s bezeichnen,

$$2. \quad s = r\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = r\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\cdots\right).$$

Denselben Werth erhält man natürlich auch aus S'.

Jetzt hat sich das Polygon $AKL\ldots T$ in die Evolvente des Kreisbogens AB verwandelt, eben so das Polygon AE in die Evolvente der Curve AT u. s. w., wie sich durch Anschauung unmittelbar ergiebt. Die Gerade BT wird eine Tangente an den Kreis, eben so ET eine Tangente an die Evolvente AT u. s. w. Alle diese äufsersten Geraden stehen dann senkrecht auf einander und bilden die in der ersten Abhandlung erwähnte rechtwinklige Spirale.

Der Lehrer hat hier die beste Gelegenheit, die so wichtigen Begriffe von der Abwickelung und den Krümmungskreisen auseinander zu setzen; zugleich hat er hier ein Beispiel einer Rectification durch elementare Betrachtungen, und zwar unendlich vieler Curven auf einmal, ein Beispiel was er sonst vergeblich suchen möchte und wofür sich bei Schülern immer Interesse findet.

Löst man in (2.) die Klammer auf, so stellen die einzelnen Glieder der Reihe entsprechend den Radius AC dar, den Kreisbogen AB, dessen Evolvente AT, die Evolvente AE dieser Curve u. s. w.

§. 3.

Nimmt man den Bogen α der Einheit gleich, so ergiebt sich

$$1. \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots = 2{,}71828\ldots = e,$$

und wenn man in (2.) des §. 2. $n\alpha$ statt n setzt, so erhält man

$$2. \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha} = 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\cdots = e^\alpha = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

daher ist

$$3. \quad s = re^\alpha$$

und hiernach

$$4. \quad \alpha = \log\frac{s}{r},$$

wenn durch log die Logarithmen für die Basis e oder die natürlichen Lo-

garithmen bezeichnet werden. Aus (2.) in §. 2. ist aber auch

$$5. \quad \alpha = \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Nennt man nun σ den Theil der Spirale ohne den Radius, so ist

$$s = r + \sigma,$$

und aus der Gleichstellung von (4.) und (5.)

$$6. \quad \log\left(1+\frac{\sigma}{r}\right) = \frac{\left(1+\frac{\sigma}{r}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\sigma}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4 + \cdots,$$

oder, wenn man den Quotienten $\frac{\sigma}{r} = x$ setzt,

$$7. \quad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

Für den Radius $r = 1$ ergiebt sich aus (4.) ganz einfach

$$8. \quad \alpha = \log s.$$

Denkt man sich also einen Kreis vom Radius 1 und sucht zu den Spiralen, deren Länge 1, 2, 3, 4, ... beträgt, die entsprechenden Kreisbogen 0; 0,69314; 1,09861; 1,38629; ...., so sind diese die natürlichen Logarithmen von jenen. Sucht man aber zu einer Spirale a den zugehörigen Bogen b und mifst die oben gefundenen Bogen durch den Bogen b, so sind die Quotienten die Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... für die Basis a. Es ist z. B. $\log 10 = 2{,}30258$, folglich beträgt der Bogen 1,09861, dessen Spirale 3 ist, von dem Bogen 2,30258 fast genau 0,47712, welches eben der gemeine Logarithmus von 3 ist.

§. 4.

Es ist nun leicht zu sehen, dafs wenn in Fig. 10. der Bogen $BA = \alpha$ angenommen wird, der diesem gleiche Bogen $BA' = -\alpha$ zu setzen ist, und dafs die verticalen Seiten der untern Spirale, nämlich BT', $E'F'$, $G'H'$, ..., den Seiten BT, EF, FG, ... der obern entgegengesetzt laufen, also negativ zu nehmen sind, die horizontalen hingegen $T'E'$, $F'G'$, $H'K'$, ... mit den horizontalen TE, FG, HK, ... einerlei Lage, also einerlei Zeichen behalten. In diesem Falle wird also die algebraische Länge d der Spirale $CBT'D'F'$ ....

$$d = r\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = r\left(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots\right) = re^{-\alpha}.$$

Da nun der Zahlenwerth von d stets kleiner als r ist, so kann man $d=r-\delta$ annehmen und erhält dann

$$\alpha = -\log\frac{d}{r} = -\log\left(1-\frac{\delta}{r}\right),$$

aber auch

$$\alpha = \frac{1-\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

folglich

$$-\log\left(1-\frac{\delta}{r}\right) = \frac{1-\left(1-\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\delta}{r}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{r}\right)^3+\cdots,$$

so dafs also in der Reihe (7.) des §. 3. für $\log(1+x)$ das x auch negativ genommen werden kann.

§. 5.

Wie aus den gefundenen Seiten der Spirale die Reihen für den Sinus und Cosinus des Bogens α zusammengesetzt werden, ist in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden.

Da die Function e^α ohne allen Vergleich die wichtigste in der ganzen Analysis ist, so wird es sich wohl der Mühe lohnen, wenn man sie von verschiedenen Gesichtspuncten aus betrachtet. Die hier gegebene Entwickelung scheint ganz ihre Natur zu characterisiren, da sie jedem Gliede der Reihe, durch welche wir sie darstellen, seine geometrische Bedeutung anweist. Diese Entwickelung verdient auch schon deswegen Beachtung, weil sie dem Schüler diese Function nicht als das leere Resultat eines blofsen algebraischen Mechanismus überliefert. In dieser Hinsicht mache ich noch auf folgende Betrachtungen aufmerksam, die ebenfalls auf eine eigenthümliche Weise zu demselben Ziele führen. Ein Capital c vermehre sich durch einfache Zinsen in einem Jahre p mal, so erhält man an Capital und Zinsen, wenn diese nach $\frac{1}{n}$ Jahre bezahlt werden, $c+\frac{p}{n}c$ oder $c\left(1+\frac{p}{n}\right)$. Giebt man dieses Capital wieder $\frac{1}{n}$ Jahr lang auf Zinsen, so ist sein Werth, nach Verlauf desselben, $c\left(1+\frac{p}{n}\right)^2$. Nach dem folgenden $n$tel Jahre würde man von diesem Capitale $c\left(1+\frac{p}{n}\right)^3$ erhalten. Fährt man so fort und schlägt jedes $n$tel Jahr die Zinsen zum Ca-

pitale, so ist aus dem Capitale c nach einem Jahre $c\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ geworden, statt dafs bei einfachen Zinsen sein Werth nach einem Jahre nur $c(1+p)$ gewesen wäre. Könnten aber die gewonnenen Zinsen continuirlich zum Capital geschlagen werden, d. h., nähme man n unendlich grofs, so würde der Werth des Capitals c nach einem Jahre zu

$$c\left(1+\frac{p}{\infty}\right)^{\infty} = ce^p$$

anwachsen. Trüge z. B. ein Thaler in einem Jahre bei einfachen Zinsen einen Thaler, so besäfse man am Ende des ersten Jahres 2 Thaler, dagegen 2,71828 .... oder e Thaler, wenn die gewonnenen Zinsen continuirlich zum Capital geschlagen werden könnten. Man darf nun den Satz etwas allgemeiner so aussprechen: Wenn eine Einheit durch stetiges Erzeugen neuer Theile ihrer Art in einer bestimmten Zeit zu 2 anwachsen würde, so vermehrt sie sich in derselben Zeit bis auf 2,71828 .... oder e, wenn die schon hervorgebrachten Theile in demselben Maafse mit erzeugen helfen. Der erste Procefs würde einer unorganischen Absonderung entsprechen, der letztere einer organischen Schöpfung; denn einer der Grundbegriffe, die wir uns von der Natur des Organischen und der Lebensthätigkeit bilden, ist eben der, dafs das Erzeugte stets in gleichem Maafse mit erzeugen hilft Dieser organische Procefs wird in analytischer Weise durch die Function e^x ausgedrückt und sinnbildlich durch deren geometrische Eigenschaft dargestellt. Diese Betrachtungen, wenn auch nicht mehr ganz mathematischer Natur, sind sehr geeignet, auf diese rein mathematischen Entwickelungen aufmerksam zu machen; sie dürfen indessen nur mit grofser Vorsicht angestellt werden, da sie ihrer dunkeln Natur gemäfs, gewöhnlich mehr Interesse erregen, als die klaren mathematischen Bestimmungen, denen sie nur als Folie dienen sollen. Dafs übrigens die Einflechtung solcher Bemerkungen dem umsichtigen Lehrer wahren Nutzen gewährt, davon hat mich eine lange Erfahrung überzeugt.

§. 6.

Der Inhalt eines der Dreiecke wie AFC in Fig. 9. sei δ, dann ist das Dreieck $AFK = \frac{p^2\delta}{r^2}$, da sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, daher wird auch

$$\triangle GKL = 2^2\frac{p^2\delta}{r^2}, \quad \triangle HCM = 3^2\frac{p^2\delta}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad \triangle STD = (n-1)^2\frac{p^2\delta}{r^2},$$

folglich der Flächeninhalt der Figur

$$AFG \ldots . STD \ldots . LKA = (1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2)\frac{p^2\delta}{r^2}$$
$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}\cdot\frac{p^2\delta}{r^2}.$$

Denkt man sich jetzt die Figur $AFG \ldots . BC$ in einen Kreissector übergehend, so mufs n unendlich grofs angenommen werden und man erhält, wenn der Winkel ACB wieder gleich α gesetzt wird, $n\delta = \frac{1}{2}r^2\alpha$ und $p = \frac{r\alpha}{n}$, folglich die Fläche zwischen dem Kreisbogen, dessen Tangente und seiner Evolvente

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{2.3}\cdot\frac{r^2\alpha^3}{2n^3} = \frac{r^2\alpha^3}{6}.$$

Das Dreieck AKR ist nun $\frac{p^4\delta}{r^4}$ und man wird leicht übersehen, dafs der Inhalt der Figur $AK..DE..A$ gleich ist

$$\left[\left(\frac{1.2}{1.2}\right)^2+\left(\frac{2.3}{1.2}\right)^2+\left(\frac{3.4}{1.2}\right)^2+\cdots+\frac{(n-2)^2(n-1)^2}{(1.2)^2}\right]\frac{p^4\delta}{r^4}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{3n^2-6n+1}{10}\cdot\frac{p^4\delta}{r^4}.$$

Obgleich sich die Summe dieser Reihe und auch der folgenden für die Berechnung der zwischen den successiven Evolventen und deren Tangenten enthaltenen Flächen elementar finden läfst, so ist doch das Verfahren nicht mehr einfach zu nennen und man mufs als Beispiel einer Quadratur, die ebenfalls nicht allzuhäufig sind, sich lieber mit den so eben gegebenen begnügen. Durch Integration findet man den Inhalt der erwähnten Flächen vom Kreissector an auf der Stelle gleich

$$\frac{r^2\alpha}{2},\quad \frac{r^2\alpha^3}{2.3},\quad \frac{r^2\alpha^5}{2.5(1.2)^2},\quad \frac{r^2\alpha^7}{2.7(1.2.3)^2},\quad \ldots .$$

und daher, wenn man die Summe aller durch f bezeichnet,

$$f = \frac{r^2\alpha}{2}\left[1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{1}\right)^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\alpha^2}{1.2}\right)^2+\tfrac{1}{7}\left(\frac{\alpha^3}{1.2.3}\right)^2+\cdots\right],$$

wo $\frac{r^2\alpha}{2}$ der Kreissector ist.

Diese Reihe und auch die

$$1-\frac{\alpha^2}{1}+\frac{\alpha^4}{(1.2)^2}-\frac{\alpha^6}{(1.2.3)^2}+\cdots$$

welche die Differenz der Quadrate der abwechselnden Seiten der Spirale vorstellt, erscheint öfter bei physikalischen Untersuchungen.

§. 7.

Ich will hier noch bemerken, dafs sich der Taylorschen Reihe ebenfalls ein geometrischer Sinn unterlegen läfst. Es sei nämlich in Fig. 11. der Winkel *ADB*, welchen die zwei Normalen *AE* und *BF* der Curve *ABC* mit einander bilden, gleich t; ferner sei der Winkel *BFC*, welcher durch die zwei Normalen *FC* und *FB* entsteht, gleich α, dann kann der Bogen *AB* angesehen werden als ft und der Bogen *AC* als $f(t+\alpha)$. Sind nun *HG, IK, LM,* .... die successiven Evoluten der Curve *AB* und *BG, GK, KM,* .... die entsprechenden Krümmungshalbmesser, dann ist

$$BG = \frac{dft}{dt}, \quad KG = \frac{d^2ft}{dt^2}, \quad KM = \frac{d^3ft}{dt^3}, \quad \ldots.$$

Nach dem Taylorschen Satze ist nun

$$f(t+\alpha) = ft + \alpha\frac{dft}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d^2ft}{dt^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3ft}{dt^4} + \ldots.$$

folglich der Bogen $BC = \alpha\frac{dft}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d^2ft}{dt^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3ft}{dt^4} + \ldots.$

Denkt man sich daher, von *F* aus, zwischen den Schenkeln des Winkels $BFC = \alpha$ mit den Radien *BG, KG, KM,* .... Kreisbögen beschrieben und an diese die zugehörigen Spiralen gezogen, so ist der Bogen *BC* eben so grofs, als die Summe der ersten, zweiten, dritten, ... Seite, aus der ersten, zweiten, dritten, ... Spirale, wie sich aus der Vergleichung dieser Reihe mit der (2.) in §. 2. ergiebt.

§. 8.

An diese Constructionen schliefsen sich bequem noch einige mechanische Betrachtungen an. Ist s der in t Secunden mit der constanten Geschwindigkeit v durchlaufene Raum, so ist

$$v = \frac{s}{t}.$$

Diese Relation stellt man sich am anschaulichsten Fig. 12. in der Gestalt eines Kreisbogens vor, der auf einem Kreise vom Radius v durch einen Centriwinkel t bestimmt wird. Man denke sich jetzt in Fig. 9. statt der Geraden *AK* einen aus *F* mit dem Radius *FA* beschriebenen Kreisbogen, so wird dieser den in der Zeit *AFK* vom Puncte *A* mit der constanten Geschwindigkeit *FA* beschriebenen Weg der Gröfse nach bezeichnen. Wächst nun plötzlich die Geschwindigkeit der Bewegung um *FG* und bleibt während der Zeit *KGL* constant, so wird ein aus *G* mit *KG* beschriebener Kreisbogen *KL* den in dieser Zeit durchlaufenen Weg dar-

stellen. Eben so stellt ein aus H beschriebener Kreisbogen LM den in der Zeit LHM mit der constanten Geschwindigkeit LH durchlaufenen Weg dar. Diese Betrachtungen lassen sich in derselben Weise fortsetzen und man sieht auf der Stelle ein, dafs, wenn die Zuwachse der Geschwindigkeiten AF, FG, GH, ..., so wie die Winkel AFK, KGL, LHM, ... alle einander gleich sind, dafs sich dann die gebrochene Linie $AFG \dots B$ um so mehr einem Kreisbogen nähert, je kleiner die Zuwachse der Geschwindigkeiten und die mit constanter Geschwindigkeit durchlaufenen Zeiten gedacht werden. In diesem Grenzfalle wird die Summe der Kreisbögen $AK+KL+LM+\dots+DT$, oder der durchlaufene Weg die Evolvente des Bogens AB, und die während der Bewegung verflossene Zeit ist die Summe der Winkel $AFK+KGL+LHM+\dots$ oder der Centriwinkel ACB. Man kann sich nun die Bewegung auf das einfachste dadurch hervorgebracht denken, dafs ein Faden TB über den Kreisbogen AB ausgespannt liegt und dafs sich der Radius AC in der Zeit ACB mit constanter Geschwindigkeit in die Lage BC bewegt, wodurch der Faden vom Kreisbogen abgestofsen wird und mit seinem Endpuncte T die Evolvente AT beschreibt. Es ist der Radius AC, welcher durch seine Bewegung dem Puncte T stets neue Geschwindigkeiten giebt, er stellt also die beschleunigende Kraft vor. Man hat hier die Gesetze der Bewegung vor Augen, welche eine constant beschleunigende Kraft erzeugt. Wäre etwa $AC = g$ die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche der Erde, $ACB = t$ die Zeit während welcher die Schwerkraft auf den Punct T gewirkt hat, so ist $AB = BT = gt$ die erzeugte Geschwindigkeit und die Evolvente $\frac{1}{2}gt^2$ der durchlaufene Raum. Ist also um einen Kreis ein Faden geschlungen, von dem in gleichen Zeiten stets gleiche Stücke abgewickelt werden, so bewegt sich das freie Ende dieses Fadens wie ein von der Schwere getriebener Punct. Der Radius des Kreises mifst die beschleunigende Kraft, die abgewickelte Länge des Fadens die Geschwindigkeit des bewegten Punctes und der zum abgewickelten Kreisbogen gehörige Centriwinkel die verflossene Zeit.

§. 9.

Diese Vorstellungen lassen sich leicht verallgemeinern. Bezeichnet in Fig. 11. der Bogen AB einen vom Puncte B durchlaufenen Raum, so wird der Krümmungshalbmesser BG die Geschwindigkeit dieses Punctes ausdrücken, während der Krümmungshalbmesser KG für die Evolute HG des

Bogens AB die beschleunigende Kraft darstellt und der von den Normalen AD und BD gebildete Winkel ADB die verflossene Zeit. Man denke sich nämlich, dafs die Linie KG von der Curve IK abgewickelt wird, dabei die Curve HG beschreibt und so die über HG gelegte Linie abstöfst, welche durch ihre Bewegung den Bogen AB beschreibt. Dieser Bogen AB kommt hier natürlich nur als absolute Länge in Betracht, nicht als Curve von bestimmter Form. Die beschleunigende Kraft wird dann, ganz naturgemäfs, als durch eine Reihe anderer unbekannter Bewegungen erzeugt gedacht. Es wurde schon in §. 7. bemerkt, dafs wenn der Winkel $ADB = t$ und $AB = ft$ ist, dafs dann $BG = \frac{dft}{dt}$ und $KG = \frac{d^2ft}{dt^2}$ sind; hierdurch wird das verständlicher, was *Lagrange* im dritten Theile seiner Functionentheorie §. 5. äufsert und was sich mit Bezug auf diese Aeufserung in Hegels Logik in den Anmerkungen über das mathematisch Unendliche findet.

Berlin im März 1837.

20.

Note, où l'on explique une remarquable objection faite par Euler en 1751, contre une règle donnée par Newton dans son Arithmétique universelle, pour extraire la racine d'un binome réel de la forme $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, quelque soit le degré impair de la racine demandée, si toutefois elle est possible.

(Par Mr. *J. Plana* à Turin.)

---

§. I.

Je suppose qu'on a sous les yeux le Mémoire d'*Euler* intitulé *„De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus"*, publié en 1751 dans le tome XIII. des *Commentarii* de l'Académie de St. Petersbourg, et le passage de l'arithmétique universelle de *Newton* cité par *Euler*, tel qu'il est imprimé dans la page 85 du premier livre de l'édition de 1760 commentée par *Castillon*. D'abord, on sera surpris de voir la formule de *Newton* écrite ainsi dans la page 21 du Mémoire d'*Euler:*

$$\frac{ts\pm\sqrt{(ttss+n)}}{\sqrt[2c]{Q}},$$

tandis que, dans la page 85 qu'on vient de citer, la lettre n est précédée du signe *moins;* c'est-à-dire qu'on y voit

$$\frac{ts\pm\sqrt{(ttss-n)}}{\sqrt[2c]{Q}}.$$

D'après cette seule remarque on dirait que, même en adoptant l'interprétation d'*Euler,* la règle de *Newton* donne, pour l'exemple choisi par *Euler:*

$$\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{(10-2)}}{\sqrt[10]{8}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt[10]{8}},$$

et non

$$\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}.$$

Ensuite on pourrait, avec quelque raison, observer, que *Newton* prescrit de prendre pour t la valeur de

$$\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$$

in numeris integris proximis. De sorte que, dans l'exemple en question, où

$$\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}=\frac{3}{2\sqrt{10}},$$

il faudrait prendre $\frac{1}{2}$ pour cette valeur *in numeris integris proximis*, et non *l'unité*, comme *Euler* le prescrit sans ambiguité, en disant: „*definiatur numerus integer qui proxime accedat ad valorem huius expressionis* $\frac{rr+n}{2rs}$ *qui sit* $=t$"; tandisque *Newton* dit: „*sitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t*". Cette substitution du singulier ou pluriel entraîne à la conséquence, qu'il faut prendre *l'unité* au lieu de la fraction rationnelle $\frac{1}{2}$. Mais on pourrait douter, que telle était effectivement l'intention de *Newton* en écrivant ce précepte; et comme en prenant $t=\frac{1}{2}$, la règle de *Newton* donne

$$\sqrt[3]{(5\sqrt{5}+11)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{10}+\sqrt{\left(\frac{10}{4}-2\right)}}{\sqrt[6]{8}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[3]{16}};$$

c'est-à-dire le véritable résultat, on serait disposé à croire la règle de *Newton* exemte de l'objection dont parle ici *Euler*. L'autorité de ces deux noms étant également imposante, il faut pénétrer plus avant dans cette discussion.

§. II.

Admettons, si l'on veut, que ce premier argument d'*Euler* soit par là renversé: il ne faudra pas se hâter d'en conclure, que l'application de la règle de *Newton* est toujours sûre. Car en l'appliquant à l'exemple

$$\sqrt[3]{(139\sqrt{3}+91\sqrt{7})}=M,$$

on aurait: $n=2$; $Q=32$; $A\sqrt{Q}=139\sqrt{3}.\sqrt{32}=139.4\sqrt{6}$; partant $s=\sqrt{6}$:

$$\sqrt[3]{((139\sqrt{3}+91\sqrt{7})\sqrt{32})}=3{,}09557=r,$$

$$\frac{n}{r}=0{,}64608;\quad \frac{r+\frac{n}{r}}{2s}=\frac{3{,}74165}{2\sqrt{6}}=\frac{1{,}52752}{2},$$

ou bien, *in numeris integris proximis:*

$$\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}=\frac{3+\frac{2}{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{11}{6\sqrt{6}}=0{,}74846=\frac{3}{4}=t.$$

On a donc ici:

$$M = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{6} + \sqrt{\left(6\frac{9}{16} - 2\right)}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{26}}{2\sqrt[7]{64}}.$$

En prenant $t = 1$, conformément à l'interprétation d'*Euler*, on aurait

$$M = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{(6-2)}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Mais, l'un et l'autre de ces deux résultats sont fautifs: le véritable est

$$M = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}.$$

On pourrait le trouver par un acte de pénétration mentale, en observant que le nombre 1,52752 est la valeur de $\sqrt{\frac{7}{3}}$; car alors on férait $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$; $s = \sqrt{6}$; et la formule de *Newton* donnerait:

$$M = \frac{st + \sqrt{(s^2t^2 - n)}}{\sqrt[14]{Q}} = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{(\frac{7}{2} - 2)}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Mais rien n'enseigne, dans la règle de *Newton*, comment on pourrait exécuter avec certitude une telle transformation de la quantité qu'il désigne par t. Ainsi, cet exemple établit incontestablement qu'il y a un vice dans cette règle, et il accroît la curiosité de connoître la source de son existence. Cette source ne se trouve pas clairement indiquée dans le Mémoire d'*Euler;* mais une légère addition que je vais faire à son analyse, suffira pour la mettre en évidence, et pour offrir en même tems un caractère certain, propre à distinguer les cas, où la règle de *Newton* doit réussir, de ceux où elle doit être en défaut.

§. III.

Soit $A \pm B$ le binome dont il s'agit d'extraire la racine du degré n, en supposant, que les carrés A^2, B^2 sont deux nombres rationnels et entiers, tels que $A^2 > B^2$. Pour cela, on établit l'équation

$$\sqrt[n]{(A \pm B)} = \frac{x \pm y}{2\sqrt[2n]{p}},$$

et on regarde p comme un nombre entier ainsi que les carrés x^2, y^2. Cette forme une fois admise, on a nécessairement les deux équations

$$\sqrt[n]{(A + B)} = \frac{x + y}{2\sqrt[2n]{p}}, \qquad \sqrt[n]{(A - B)} = \frac{x - y}{2\sqrt[2n]{p}};$$

desquelles on tire

$$x^2-y^2 = 4\sqrt[n]{[(A^2-B^2)p]},$$
$$x^2+y^2 = 2\sqrt[n]{[(A+B)^2p]}+2\sqrt[n]{[(A-B)^2p]}.$$

Actuellement je suppose nombre entier A^2-B^2 décomposé en ses facteurs premiers; ce qui donnera

$$A^2-B^2 = 2^a.3^{a'}.5^{a''}.7^{a'''}\dots.$$

Donc en prenant

$$p = 2^b.3^{b'}.5^{b''}.7^{b'''}\dots.$$

de manière, que $n=a+b=a'+b'=a''+b''=a'''+b'''=\dots.$, on aura

$$(A^2-B^2)p=(2.3.5.7\dots.)^n=r^n.$$

Les nombres entiers p et r seront par là connus, et en posant

$$\text{I.}\quad s = \sqrt[n]{[(A+B)^2p]}+\sqrt[n]{[(A-B)^2p]},$$

nous avons les deux équations

$$x^2-y^2=4r,\qquad x^2+y^2=2s;$$

desquelles on tire

$$x=\sqrt{(s+2r)},\qquad y=\sqrt{(s-2r)},$$

et par conséquent

$$\text{II.}\quad \sqrt[n]{(A\pm B)} = \frac{\sqrt{(s+2r)}\pm\sqrt{(s-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}.$$

Ainsi, l'unique condition nécessaire pour l'extraction de cette racine est, que le nombre s soit entier. Or en examinant la forme de son expression, il est facile de voir, que ce nombre doit être une racine de l'équation du degré n résolue par *Moivre*. Donc en posant

$$\frac{a}{2}=(A^2+B^2)p,\qquad \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}=2pAB,$$

ou bien

$$a=2p(A^2+B^2);\qquad b=p^2(A^2-B^2)^2=r^{2n},$$

on aura, pour déterminer s, l'équation

$$\text{III.}\quad 2p(A^2+B^2)=s^n-nr^2.s^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}r^4.s^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}r^6.s^{n-6}+\text{etc.};$$

ce qui revient à dire, que le nombre entier s doit être un des facteurs du nombre entier $2p(A^2+B^2)$; puisque, n étant, par hypothèse, un nombre impair, $2p(A^2+B^2)$ doit être le produit de toutes les racines de l'équation (III.). Pour découvrir rapidement la racine qui convient à l'objet actuel, on calculera, avec une table de Logarithmes, les deux parties de la valeur primitive de s, fournies par l'équation (I.), en ayant soin de faire ce calcul avec plusieurs chiffres décimales: ensuite on verra, si l'ad-

dition de ces deux nombres donne un nombre entier, avec une grande approximation. Alors, l'équation (III.) servira uniquement à vérifier le nombre entier ainsi trouvé. Ce procédé est fort utile dans la pratique: il sert aussi à indiquer l'impossibilité de l'extraction de la racine demandée, en donnant une fraction fort éloignée de l'unité pour la somme des deux parties décimales.

Si le degré n de la racine était *pair*, l'équation (III.) contiendrait seulement des puissances paires de z: de sorte que, en admettant qu'elle eut des racines commensurables, on en pourrait tirer une valeur entière pour z^2. Mais alors la racine de ce nombre, s'il n'est pas lui même un carré parfait, ne serait pas un nombre entier; ce qui empêcherait d'avoir pour x^2 et y^2 des nombres entiers, ainsi que nous l'avons supposé. Analytiquement parlant, les formules (II.) et (III.) sont donc aussi applicables aux racines de degré pair, en modifiant convenablement l'idée primitive qu'on avait donnée sur les deux quantités désignées par x et y. L'analyse détruit toujours les limitations qui ne sont pas inhérentes à la nature intime de la question. Au reste nous continuons l'hypothèse, que n soit impair; parceque ce cas est le seul qui fait le sujet de la règle de *Newton* sur laquelle porte cette discussion.

§. IV.

Cela posé, voyons quelle est la connexion qui existe entre les équations (II.) et (III.) et la règle donnée par *Newton*. A cet effet, soit

$$A\sqrt{p} = \sqrt{(A^2 p)} = \sqrt{(q^2 f)} = q\sqrt{f},$$

et regardons le nombre entier q comme le plus grand diviseur commensurable de la quantité $A\sqrt{p}$; le nombre entier f est un autre nombre tout-à-fait déterminé par cette même condition. Rien n'empêche d'introduire ce nombre dans le second membre de l'équation (II.), en écrivant:

$$\sqrt[n]{(A\pm B)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{f}\cdot\sqrt{\left(\frac{z+2r}{f}\right)}\pm\left(\frac{(z+2r)f}{4f}-r\right)}{\sqrt[2n]{p}}.$$

Maintenant si l'on fait

$$S=\sqrt{f}, \qquad T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{z+2r}{f}\right)},$$

on pourra écrire

$$\text{IV.} \qquad \sqrt[n]{(A\pm B)} = \frac{TS\pm\sqrt{(T^2S^2-r)}}{\sqrt[2n]{p}}.$$

La forme de cette formule coïncide avec celle de *Newton*, ainsi que la

forme de la quantité représentée par S. Mais on ne voit pas encore, qu'on puisse en dire autant à l'égard de la quantité designée par T. Cependant, si l'on fait pour un moment

$$U=\sqrt[n]{((A+B)^2p)};\qquad V=\sqrt[n]{((A-B)^2p)},$$

il viendra

$$UV=\sqrt[n]{((A^2-B^2)^2p^2)}=\sqrt[n]{(r^{2n})}=r^2,$$

et

$$s=U+V=U+\frac{r^2}{U}.$$

On a donc

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{U+\frac{r^2}{U}+2r}{f}\right)}=\frac{U+r}{2\sqrt{(Uf)}}=\frac{\sqrt{U}+\frac{r}{\sqrt{U}}}{2S}.$$

L'expression de T, ainsi écrite, devient conforme à la règle de *Newton;* et si l'on veut rendre la coïncidence parfaite, on fera

$$\sqrt{U}=\sqrt[n]{((A+B)\sqrt{p})}=R,$$

ce qui donne

$$\text{V.}\qquad T=\frac{R+\frac{r}{R}}{2S}.$$

Voilà comment la formule (II.) peut être transformée dans la formule (IV.), en y regardant les quantités S et T connue déterminées par les équations

$$S=\sqrt{f},\qquad T=\frac{R+\frac{r}{R}}{2S}.$$

Mais si cela est vrai et toujours vrai, analytiquement pas, il n'est pas également vrai d'en conclure que, toutes les fois que l'extraction de la racine est possible, on doit remplacer T par la valeur rationnelle que cette quantité admet *in numeris integris proximis*. Car en revenant à son expression primitive, sous la forme

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{s+2r}{f}\right)},$$

on conçoit, qu'une telle substitution ne peut être légitime, qu'à l'égard des cas particuliers dans lesquels la quantité $\frac{s+2r}{f}$ sera le carré d'un nombre entier pair. Même dans les cas non moins particuliers, où l'on aurait $\frac{s+2r}{f}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, et par conséquent $T=\frac{\alpha}{2\beta}$, on ne pourrait reconnoître la rationnalité de cette quantité, en la calculant par la formule (V.)

de *Newton*, si ce n'est dans le cas fort simple où l'on aurait

$$\frac{R+\frac{r}{R}}{S} = 1.$$

C'est précisement ce qui arrive dans l'exemple $\sqrt[3]{(5\sqrt{5}+11)}$ cité par *Euler*; où l'on a $s = 6$; $r = 2$; $5\sqrt{5}.\sqrt{8} = 10\sqrt{10}$; $f = 10$, et par conséquent $\frac{s+2r}{f} = \frac{10}{10} = 1$. Mais dans le second exemple d'*Euler*; savoir

$$\sqrt[3]{(139.\sqrt{3}+91.\sqrt{7})},$$

où l'on a $s = 10$; $r = 2$; $139\sqrt{3}.\sqrt{32} = 139.4\sqrt{6}$; $f = 6$; et par conséquent $\frac{s+2r}{f} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, la règle de *Newton* doit être en défaut, puisque la substitution de la valeur de $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$ *in numeris integris proximis* enlève à ce nombre le caractère d'irrationnalité qui lui est inhérent, et qu'il doit conserver dans la racine cherchée. De là nous concluons, que la règle de *Newton* est fautive en ce sens, qu'elle exige trois conditions là où une seule suffit; savoir: 1°. que le nombre s soit entier; 2°. que le nombre $\frac{s+2r}{f}$ soit un carré; 3°. que ce carré soit celui d'un nombre entier pair. La réunion de ces trois conditions existe dans les trois exemples choisis par *Newton*. Mais il est démontré par l'analyse que je viens d'exposer, que la seconde et la troisième ne sauraient être admises en général: et il y a effectivement une foule de cas où l'extraction de la racine est possible sans qu'elles soient remplies. *Euler* avait donc raison de parler de cette règle, comme d'une règle *„satis complicatae et analyseos principiis admodum adversantis,"* et d'affirmer en outre qu'elle a un vice *„quod in isto negotio maximum est, ut saepe numero radicem veram, et si talis in forma binomia datur, non exhibeat."* D'ailleurs ce problème ne pouvait être complètement résolu sans associer à la formule (II.) l'équation (III.): et sur ce point il n'y a aucun indice dans la règle de *Newton*. Cette même règle se trouve accompagnée d'une assez longue Note dans la traduction française de l'arithmétique universelle publiée en 1802 par Mr. *Noel Beaudeux*; mais rien n'y indique l'existance de l'objection faite par *Euler* (Voyez pages 116—121 du second volume de cette traduction).

Turin le 10. Decembre 1836.

21.

Note sur le passage qui termine le §. 8. du Mémoire de Mr. Plana, imprimé dans le vol. 17.

En réfléchissant de nouveau sur ce passage, j'ai acquis la conviction, que la fraction continue de *Brounker* pouvait effectivement être regardée comme une transformation immédiate de la factorielle de *Wallis*. Je vais faire voir de quelle manière on peut mettre en évidence la connexion intime qui existe entre ces deux expressions de la même transcendante numérique $\frac{4}{\pi}$.

Quelle que soit la méthode imaginée par *Brounker:* d'après les idées d'*Euler,* publiées en 1739 dans un de ses Mémoires qui fait partie du tome XI. des anciens *Commentarii* de l'Académie de St. Petersbourg, sa fraction continue n'aurait pas été trouvée *a priori,* mais presque à son insu, et comme une conséquence forcée d'un procédé particulier sur lequel il était tombé par la suite de ses méditations. *Euler* a même conjecturé, avec assez de raison, qu'il avait deviné la méthode ainsi rencontrée par *Brounker;* mais il faut avouer, que la probabilité d'une telle divination semble en quelque sorte infirmée par la complication des transformations à travers lesquelles il parvient à ce résultat. Cependant, la méthode d'*Euler* est susceptible d'être simplifiée en la pésentant de la manière suivante.

Reprenons les équations

$$\int_0^1 \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5.7....2i-1}{2.4.6.8....2i}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.8....2i}{3.5.7.9....2i+1};$$

citées dans le §. 8.: en les multipliant on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int_0^1 \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2(2i+1)}.$$

Par la nature de ces limites, ils est permis de remplacer x par x^n: alors, en faisant $p = n(2i+1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int_0^1 \frac{x^{p+n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2np}.$$

Pour un autre exposant p', on a de même

$$\int_0^1 \frac{x^{p'-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p'+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2np'}.$$

Donc en divisant ces deux dernières équations, on aura

$$E. \quad \frac{\int_0^1 \frac{x^{p'-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}}{\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}} \cdot \frac{\int_0^1 \frac{x^{p'+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}}{\int_0^1 \frac{x^{p+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}} = \frac{p}{p'}.$$

Cela posé, si l'on fait $p' = p+2r$:

$$B. \quad f(p) = (p+2r-n) \cdot \frac{\int_0^1 \frac{x^{p+2r-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}}{\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}},$$

et par conséquent,

$$f(p+n) = (p+2r) \cdot \frac{\int_0^1 \frac{x^{p+2r+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}}{\int_0^1 \frac{x^{p+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}},$$

l'équation ($E.$) reviendra à dire, que

$$\frac{f(p)}{p+2r-n} \cdot \frac{f(p+n)}{p+2r} = \frac{p}{p+2r},$$

ou bien, que

$$E'. \quad f(p).f(p+n) = p(p+2r-n).$$

Cette équation aux différences finies exprime la propriété caractéristique des fonctions de p, qui seraient évaluées par le second membre de l'équation ($B.$).

Maintenant, si l'on fait $n = 2$ et $r = 1$, on aura

$$E''. \quad f(p) \cdot f(p+2) = p^2;$$

$$B'. \quad f(p) = p \cdot \frac{\int_0^1 \frac{dx.x^{p+1}}{\sqrt{(1-x^4)}}}{\int_0^1 \frac{dx.x^{p-1}}{\sqrt{(1-x^4)}}}.$$

Ces deux équations étaient connues par *Wallis* et *Brounker*. Le premier y voyait un moyen de faire dépendre la valeur de $f(p)$ d'une fonction semblable où l'exposant p serait agrandi à volonté. Pour cela, il suffit de changer p en $p+2$, $p+4$, $p+6$, $p+8$, etc.; ce qui donne

$f(p) \cdot f(p+2) = p^2;$	$f(p+2) \cdot f(p+4) = (p+2)^2;$
$f(p+4) \cdot f(p+6) = (p+4)^2;$	$f(p+6) \cdot f(p+8) = (p+6)^2;$
$f(p+8) \cdot f(p+10) = (p+8)^2;$	$f(p+10) \cdot f(p+12) = (p+10)^2;$
etc.	etc.

Or, en divisant le produit des équations qui sont à gauche par le produit de celles qui sont placées à la droite, il viendra

$$f(p).f(p+4i+2) = p^2.\frac{(p+4)^2(p+8)^2(p+12)^2....(p+4i)^2}{(p+2)^2(p+6)^2(p+10)^2....(p+4i-2)^2}.$$

Mais, le rapport des deux intégrales qu'on voit dans le second membre de l'équation (B'.) est d'autant plus approchant de l'unité que le nombre p est plus grand. Donc en supposant le nombre i infiniment grand, l'équation (B.) donnera

$$f(p+4i+2) = p+4i+2.$$

De sorte qu'on peut écrire

$$f(p) = p^2.\frac{(p+4)^2(p+8)^2(p+12)^2....(p+4i)^2}{(p+2)^2(p+6)^2(p+10)^2....(p+4i-2)^2}.\frac{1}{p+4i+2},$$

pourvu que i soit infiniment grand. Cette condition entraine avec elle la faculté de pouvoir faire

$$\frac{p+4i}{p+4i+2} = 1;$$

et alors on écrit

$$W. \quad f(p) = p^2.\frac{(p+4)^2(p+8)^2(p+12)^2....(p+4i-2)^2.(p+4i)}{(p+2)^2(p+6)^2(p+10)^2....(p+4i-2)^2}.$$

Telle est la factorielle par laquelle *Wallis* évaluait le rapport des deux intégrales qu'on voit dans le second membre de l'équation (B'.). Dans le cas particulier de $p=2$, on a

$$2. \quad \frac{\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^4)}}}{\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^4)}}} = \frac{2}{\int_0^1 \frac{d.x^2}{\sqrt{(1-x^4)}}} = \frac{2}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}} = \frac{4}{\pi};$$

et par conséquent

$$\frac{4}{\pi} = 2^2.\frac{6^2.10^2.14^2.18^2....(4i-2)^2.(4i+2)}{4^2.\ 8^2.12^2.16^2..........(4i)^2},$$

ou bien

$$\frac{4}{\pi} = 2^2.\frac{3^2.5^2.7^2.9^2....(2i-1)^2.(2i+1)}{2^2.4^2.6^2.8^2..........(2i)^2}.$$

Admettons, que, *Brounker* en examinant de son côté l'équation (E''.) ait eu l'idée de faire

$$f(p) = p-1+\frac{1}{\psi(p)}; \qquad f(p+2) = p+1+\frac{1}{\psi(p+2)}.$$

La substitution de ces valeurs change l'équation (E''.) en celle-ci:

$$E'''. \quad \psi(p)\psi(p+2)-(p-1)\psi(p)-(p+1)\psi(p+2)-1 = 0.$$

Actuellement si l'on fait ici:

$$\psi(p) = 2(p-1) + \frac{K}{\psi'(p)}; \qquad \psi(p+2) = 2(p+1) + \frac{K}{\psi'(p+2)},$$

on trouvera

$$-9.\psi'(p)\psi'(p+2) + K^2 + K(p-3)\psi'(p) + K(p+3)\psi'(p+2) = 0.$$

Le coëfficient K étant encore indéterminé, il est permis de faire $K = 9$; ce qui revient à dire, qu'en posant

$$\psi(p) = 2(p-1) + \frac{9}{\psi'(p)}, \qquad \psi(p+2) = 2(p+1) + \frac{9}{\psi'(p+2)},$$

l'équation (E'''.) se change en celle-ci:

$$E^{IV}. \quad \psi'(p).\psi'(p+2) - (p-3)\psi'(p) - (p+3)\psi'(p+2) - 9 = 0.$$

Maintenant, si l'on fait ici

$$\psi'(p) = 2(p-1) + \frac{K'}{\psi''(p)}, \qquad \psi'(p+2) = 2(p+1) + \frac{K'}{\psi''(p+2)},$$

on trouvera qu'il convient de prendre $K' = 25$. De sorte que, en posant

$$\psi'(p) = 2(p-1) + \frac{25}{\psi''(p)}, \qquad \psi'(p+2) = 2(p+1) + \frac{25}{\psi''(p+2)},$$

on aura

$$E^{V}. \quad \psi''(p).\psi''(p+2) - (p-5)\psi''(p) - (p+5)\psi''(p+2) - 25 = 0.$$

Pour passer de cette équation à la suivante, on y fera

$$\psi''(p) = (p-1) + \frac{49}{\psi'''(p)}, \qquad \psi''(p+2) = 2(p+1) + \frac{49}{\psi'''(p+2)};$$

ce qui donnera

$$E^{VI}. \quad \psi'''(p).\psi'''(p+2) - (p-7)\psi'''(p) - (p+7)\psi'''(p+2) - 49 = 0.$$

Sans continuer plus loin ce détail, il doit être clair, que les transformées successives s'obtiennent, en faisant

$$\psi^{(i)}(p) = 2(p-1) + \frac{(2i+3)^2}{\psi^{(i+1)}(p)}.$$

Il est par là démontré, que l'équation

$$f(p).f(p+2) = p^2$$

peut être satisfaite par une approximation indéfinie, en posant

$$f(p) = p - 1 + \frac{1}{\psi(p)},$$

et remplacant successivement $\psi(p)$, $\psi'(p)$, $\psi''(p)$ etc. par leurs valeurs déduites de la formule

$$\psi^{(i)}(p) = 2(p-1) + \frac{(2i+3)^2}{\psi^{(i+1)}(p)}.$$

De cette manière, il est manifeste, qu'on obtient

$$B. \quad f(p) = (p-1) + \cfrac{1}{2(p-1) + \cfrac{9}{2(p-1) + \cfrac{25}{2(p-1) + \cfrac{49}{2(p-1) + \cfrac{81}{2(p-1) + \text{etc.}}}}}}$$

Telle est la formule, qui, en y faisant $p = 2$, donne pour $\frac{4}{\pi}$ la fraction continue de *Brounker*.

Suivant cette analyse, le point de départ de *Wallis* et de *Brounker* aurait été le même: l'un et l'autre ont eu pour but de résoudre par approximation l'équation

$$f(p).f(p+2) = p^2:$$

le premier y parvenait à l'aide de la factorielle (W.), le second à l'aide de la fraction continue (B''.) *Newton*, au contraire, résolvait le même problème par le développement des radicaux qu'on voit dans le second membre de l'équation (B'.).

Cette analyse prouve aussi, que l'opinion de *Lagrange* rappelée à la fin du §. 8. est exacte: mais, pour être juste, il ne faut pas dire, que *Wallis* avait réellement démontré, que le produit des deux fractions continues

$$f(p) = (p-1) + \frac{1}{2(p-1) + \text{etc.}},$$

$$f(p-2) = (p+1) + \frac{1}{2(p+1) + \text{etc.}};$$

doit être égal à p^2. *Euler* cite ce lemme de *Wallis* en ajoutant „*cujus veritatem per inductionem satis confirmat, sed, quod caput est; analysin non affert, qua ad hoc theorema sit perventum.*“ (Voyez page 101 du tome IX. des anciens *Commentarii* de l'Académie de St. Petersbourg.) La méthode précédente donnerait également la fraction continue qui satisfait à l'équation (E'.). Pour cela, on y fera d'abord

$$f(p) = p + r - n + \frac{H}{\psi(p)}; \qquad H = rn - r^2;$$

ce qui donnera

$$G. \quad \psi(p).\psi(p+n) - (p+r-n)\psi(p) - (p+r)\psi(p+n) - H = 0.$$

Cela posé, on obtiendra les transformées successives de cette équation en faisant

$$\psi(p) = 2(p+r-n) + \frac{2n^2+H}{\psi'(p)};$$

$$\psi'(p) = 2(p+r-n) + \frac{6n^2+H}{\psi''(p)};$$

. . . .

$$\psi^{(i)}(p) = 2(p+r-n) + \frac{(i+1)(i+2)n^2+H}{\psi^{(i+1)}(p)}.$$

Donc, en posant pour plus de simplicité

$$g = p+r-n; \qquad H_{(i)} = (i+1)(i+2)n^2+H,$$

il viendra

$$G'. \qquad f(p) = (g+r) \cdot \frac{\int_0^1 \frac{dx.x^{g+r+n-1}}{\sqrt{(1-x^{2n})}}}{\int_0^1 \frac{dx.x^{g+n+r-1}}{\sqrt{(1-x^{2n})}}} = g + \cfrac{H}{2g + \cfrac{H_{(1)}}{2g + \cfrac{H_{(2)}}{2g + \cfrac{H_{(3)}}{2g + \text{etc.}}}}}$$

Si on voulait exprimer en factorielles le rapport de ces deux intégrales, il suffirait d'y appliquer les formules que j'ai données au commencement du §. 16.

Turin le 26. Janvier 1837.

Dans le tome 2. des *Nova Acta* de l'Académie de St. Petersbourg, *Euler* a émis (Voyez page 43) une opinion tout-à-fait différente sur l'objet dont il est ici question. Suivant cette manière de voir il faut admettre: 1°. que *Brounker* a pris pour point de départ la série $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-$etc. trouvée par *Gregory* avant *Leibnitz*; 2°. qu'il a eu l'idée d'établir cette suite d'équations $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{A_{(1)}}$; $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{A_{(2)}}$; $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{A_{(3)}}$; $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{A_{(4)}}$; etc.; lesquelles reviennent à dire, que $A_{(1)} = \frac{3A_{(2)}}{A_{(2)}-3}$; $A_{(2)} = \frac{5A_{(3)}}{A_{(3)}-5}$; $A_{(3)} = \frac{7A_{(4)}}{A_{(4)}-7}$; $A_{(4)} = \frac{9A_{(5)}}{A_{(5)}-9}$; $A_{(5)} = \frac{11A_{(6)}}{A_{(6)}-11}$; . . . . $A_{(n)} = \frac{(2n+1)A(n+1)}{A_{(n+1)}-(2n+1)}$; 3°. qu'il a transformé ces dernières équations en celles-ci: $A_{(1)} = 3+\frac{9}{A_{(2)}-3}$; $A_{(2)} = 5+\frac{25}{A_{(3)}-5}$;

$A_{(3)} = 7 + \frac{49}{A_{(4)} - 7}$; $A_{(4)} = 9 + \frac{81}{A_{(5)} - 9}$; $A_{(5)} = 11 + \frac{121}{A_{(6)} - 11}$; ....
$A_{(n)} = 2n + 1 + \frac{(2n+1)^2}{A_{(n+1)} - (2n+1)}$. Cela posé, en partant de la première équation $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{A_{(1)}}$, on aurait, par l'élimination successive de $A_{(1)}$, $A_{(3)}$, etc.:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Mais ce résultat étant la différence entre l'unité et une fraction, n'a pas paru à *Brounker* assez élégant, et il faut accorder; 4°. qu'il a eu l'idée de transformer l'équation $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{A_{(1)}}$, en

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{A_{(1)} - 1}},$$

afin d'obtenir par la même élimination:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Or je demande s'il est naturel de croire, que *Brounker* ait suivi un procédé aussi facile à exécuter qu'il étoit difficile à imaginer, à une époque, où, chaque opération du calcul étoit suggérée par des considérations étrangères à la puissance des transformations purement analytiques? L'explication précédente, quoique plus transcendante, me parait plus probable.

22.

Mémoire sur l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux; et sur l'évaluation de la surface d'une voute symmétrique, à la base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoïde.

(Par Mr. *J. Plana* à Turin.)

§. I.

Soit

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de la surface de l'ellipsoïde. L'expression de l'aire comprise entre des limites données sera, comme on sait, fournie par la double intégrale

$$S = \iint dx\,dy \sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}.$$

Donc, en substituant pour $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ leurs valeurs déterminées par l'équation (1.), et faisant pour plus de simplicité

$$\delta^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2} \qquad \varepsilon^2 = \frac{b^2-c^2}{b^2},$$

il viendra

$$2. \quad S = \iint dx\,dy \sqrt{\left(\frac{1-\delta^2.\frac{x^2}{a^2}-\varepsilon^2.\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)}.$$

Actuellement, si l'on fait $z = c.\cos\theta$, l'équation (1.) sera satisfaite en prenant

$$x = a.\sin\theta\sin\varphi, \qquad y = b.\sin\theta\cos\varphi.$$

L'angle θ étant constant, on peut considérer ces expressions de x, y comme les coordonnées de l'ellipse formée par la section de l'ellipsoïde par un plan parallèle à celui des x, y, mené à la hauteur $c.\cos\theta$. Mais en introduisant les deux nouvelles variables indépendantes θ et φ à la place de x, y, il faudra, conformément au principe relatif à la transformation des intégrales

doubles, remplacer $dx\,dy$ par

$$d\theta\,d\varphi\left[\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)-\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)\right] = ab.d\theta\,d\varphi.\sin\theta\cos\theta;$$

ce qui donne

$$3. \qquad S = ab\int\!\!\int d\varphi\,d\theta\sin\theta.\sqrt{(1-P\sin^2\theta)},$$

en posant pour plus de simplicité

$$P = \delta^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi.$$

§. II.

Si l'on veut expliquer géométriquement, à quoi revient cette transformation, il faut observer, que les expressions précédentes de x, y donnent

$$4. \qquad y = x\cdot\frac{b}{a}\cot\varphi:$$

de sorte qu'on peut regarder cette équation comme celle d'un plan coupant l'ellipsoïde mené par l'axe des z. L'angle φ est constant pour tous les points de l'ellipse tracée sur l'ellipsoïde par un de ces plans coupans: mais l'angle θ y varie depuis $\theta=0$, jusqu'à $\theta=\frac{\pi}{2}$ (en considérant seulement les ordonnées z positives).

Imaginons maintenant deux sections semblables qui comprennent un angle infiniment petit $d\varphi$. Pour passer de la première section à la seconde sans faire changer l'abscisse x, il faudra différentier l'équation (4.) par rapport à y et φ; ce qui donne

$$dy = -\frac{b}{a}\cdot x\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ou bien

$$dy = -b\,d\varphi\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\varphi},$$

en remplaçant x par sa valeur $a\sin\theta\sin\varphi$.

En demeurant sur la même section, on passe d'un point au point infiniment proche, en laissant φ constant et differentiant l'équation (4.) par rapport à x, y. Donc, en désignant par $d'y$ ce second accroissement de y, pour le distinguer du premier, l'équation (4.) donnera

$$d'y = \frac{b}{a}dx.\cot\varphi.$$

D'un autre côté, l'équation $y=b\sin\theta\cot\varphi$ donne $d'y=b\,d\theta\cos\theta\cos\varphi$; partant on a l'équation

$$b\,d\theta\cos\theta\cos\varphi = \frac{b}{a}dx.\cot\varphi,$$

de laquelle on tire

$$dx = a\,d\theta \cos\theta . \sin\varphi .$$

Cela posé, il est clair, que le produit

$$dx\,dy = b\,d\varphi \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} \times a\,d\theta \cos\theta \sin\varphi$$

donne l'aire du parallélogramme infiniment petit compris entre les deux sections menées par l'axe des z. A la vérité, l'inclinaison des deux côtés qui font l'angle différentiel $d\varphi$ empêcherait de regarder ce quadrilatère comme un parallélogramme: c'est un véritable trapèze. Mais, la différence de ces deux surfaces tombe sur les quantités du troisième ordre, est on doit la négliger, conformément au véritable esprit du Calcul différentiel.

§. III.

D'après cette explication on conçoit, que l'intégrale

$$ab\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta \sqrt{(1-P\sin^2\theta)},$$

exécutée en regardant l'angle φ comme constant, donnera l'aire de l'onglet différentiel formé par deux plans menés par l'axe des z, faisant entr'eux l'angle infiniment petit $d\varphi$. La surface de cet onglet différentiel peut être exprimée par un logarithme. Mais si on demande l'aire d'un onglet fini comprise entre deux plans dont les équations sont

$$y = \frac{b}{a} x \cot\varphi', \qquad y = \frac{b}{a} x \cot\varphi'',$$

il faudra évaluer la double intégrale

$$ab \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta . \sin\theta \sqrt{(1-P\sin^2\theta)}.$$

§. IV.

Maintenant, si l'on conçoit deux sections infiniment voisines faites dans l'ellipsoïde par deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe des z, la surface de la zone comprise entre ces deux plans sera exprimée par

$$4ab . d\theta \sin\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(1-P\sin^2\theta)}.$$

Or en posant

$$c'^2 = \frac{(\delta^2-\varepsilon^2)\sin^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}; \qquad c''^2 = \frac{(\varepsilon^2-\delta^2)\sin^2\theta}{1-\delta^2\sin^2\theta},$$

on a

$$1-P\sin^2\theta = (1-\varepsilon^2\sin^2\theta)(1-c'^2\sin^2\varphi) = (1-\delta^2\sin^2\theta)(1-c''^2\sin^2\varphi).$$

Donc, l'aire de la zone élémentaire sera exprimée par

$$4ab.d\theta\sin\theta\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin^2\theta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(1-c'^2\sin^2\varphi)},$$

si $\delta^2 > \varepsilon^2$; et par

$$4ab.d\theta\sin\theta\sqrt{(1-\delta^2\sin^2\theta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(1-c''^2\sin^2\varphi)},$$

si $\delta^2 < \varepsilon^2$.

Il suit de là que, pour avoir l'aire d'une zone finie comprise entre deux plans dont les équations seraient $z = c.\cos\theta'$, $z = c.\cos\theta''$, il faudrait évaluer l'une ou l'autre de ces deux intégrales doubles; savoir

$$4ab\int_{\theta'}^{\theta''}d\theta\sin\theta\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin^2\theta)}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(1-c'^2\sin^2\varphi)};$$

$$4ab\int_{\theta'}^{\theta''}d\theta\sin\theta\sqrt{(1-\delta^2\sin^2\theta)}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(1-c''^2\sin^2\varphi)}.$$

§. V.

Lorsqu'il est question de la surface totale de l'ellipsoïde, le problème consiste dans l'évaluation de la double intégrale,

$$5. \quad S' = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, d\theta\sin\theta\sqrt{(1-P\sin^2\theta)}.$$

Legendre a démontré le premier que cette intégration pouvait toujours être exécutée par les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce. La simplicité de ce beau résultat fait un contraste frappant avec la complication des moyens de solution employés par *Legendre:* mais, dans l'état actuel de la science, il n'est pas difficile de tirer de l'ouvrage même de ce grand géomètre une solution qui me paraît beaucoup plus simple. Voici comment.

Supposons d'abord, qu'il soit question de déterminer la double intégrale

$$6. \quad V = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, d\theta.m\sin\theta\sqrt{(1-P.m^2\sin^2\theta)},$$

où m est un paramètre pris arbitrairement. Si l'on avoit la valeur de V, il suffirait d'y faire $m=1$ pour en conclure celle de S'. Or il est évident que la fonction de m, ainsi désignée par V, doit donner $V=0$ en y faisant $m=0$: et qu'en faisant de même $m=0$ dans son coëfficient différentiel $\frac{dV}{dm}$, on doit avoir

$$\frac{dV}{dm} = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta = 4\pi ab.$$

Donc, s'il était possible de former une équation par la combinaison des coëfficiens différentiels de la fonction V, on aurait ramené la question à l'intégration d'une équation différentielle; ce qui peut être plus au moins difficile, suivant la forme de cette équation.

Si l'intégration sera possible, les deux conditions dont nous venons de parler serviront à la détermination des constantes arbitraires.

§. VI.

Cela posé, si l'on fait

$$U = \sqrt{(m^2 - Pm^4 \sin^2\theta)},$$

on obtient

$$\frac{dU}{dm} = \frac{m - 2m^3 P \sin^2\theta}{U},$$

$$\frac{d^2U}{dm^2} = \frac{1 - 6m^2 P \sin^2\theta}{U} - \frac{m^2(1 - 2m^2 P \sin^2\theta)^2}{U^3}.$$

De là on tire,

$$\frac{1}{m^2}\cdot\frac{dU}{dm} - \frac{1}{m}\cdot\frac{d^2U}{dm^2} = \frac{4mP\sin^2\theta}{U} + \frac{m(1 - 2Pm^2\sin^2\theta)^2}{U^3}$$

$$= \frac{4m^3 P \sin^2\theta(1 - Pm^2\sin^2\theta) + m(1 - 2Pm^2\sin^2\theta)^2}{U^3};$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{m^2}\cdot\frac{dU}{dm} - \frac{1}{m}\cdot\frac{d^2U}{dm^2} = \frac{m}{U^3},$$

ou bien

$$7. \quad \frac{1}{m^2}\cdot\frac{dU}{dm} - \frac{1}{m}\cdot\frac{d^2U}{dm^2} = \frac{1}{m^2(1 - Pm^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

En multipliant les deux membres de cette équations par $d\theta\sin\theta$ et intégrant ensuite depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dU}{dm} d\theta\sin\theta - \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^2U}{dm^2} d\theta\sin\theta = \frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta\sin\theta}{(1 - Pm^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on sait, que

$$\int \frac{dx}{(a + bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{(a + bx^2)}};$$

partant il est clair, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta\sin\theta}{(1 - Pm^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - Pm^2}.$$

On a donc cette équation:

$$8.\quad \frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dU}{dm}\,d\theta\sin\theta-\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^2U}{dm^2}\,d\theta\sin\theta = \frac{1}{m^2(1-Pm^2)}.$$

Actuellement, si l'on multiplie par $d\varphi$ les deux membres de cette équation, et qu'on prenne ensuite l'intégrale depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dU}{dm}\,d\theta\sin\theta-\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^2U}{dm^2}\,d\theta\sin\theta = \frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-Pm^2}.$$

Mais nous avons

$$\int\frac{d\varphi}{1-Pm^2}=\int\frac{d\varphi}{1-m^2(\delta^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2\,d\varphi}{1-\frac{m^2}{2}(\delta^2+\varepsilon^2)+\frac{m^2}{2}(\delta^2-\varepsilon^2)\cos 2\varphi}.$$

De là on tire, d'après une formule connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-Pm^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{\left[\left(1-\frac{m^2}{2}(\delta^2+\varepsilon^2)\right)^2-\frac{m^4}{4}(\delta^2-\varepsilon^2)^2\right]}};$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-Pm^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{[(1-m^2\varepsilon^2)(1-m^2\delta^2)]}}.$$

De sorte que, en posant pour plus de simplicité

$$Q=(1-m^2\varepsilon^2)(1-m^2\delta^2)=1-m^2(\varepsilon^2+\delta^2)+m^4\delta^2\varepsilon^2,$$

on a

$$9.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dU}{dm}\,d\theta\sin\theta-m\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^2U}{dm^2}\,d\theta\sin\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{Q}}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $8ab$, on voit, par le rapprochement de l'équation (6.), que la fonction de m désignée par V donne

$$10.\quad \frac{dV}{dm}-m\frac{d^2V}{dm^2}=\frac{4\pi ab}{\sqrt{Q}}.$$

L'intégrale complète de cette équation linéaire est

$$\frac{dV}{dm}=mC-4\pi ab.m\int\frac{dm}{m^3\sqrt{Q}}.$$

Pour déterminer la constante arbitraire C, je remarque, qu'en développement $Q^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$Q^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{m^2}{2}(\delta^2+\varepsilon^2)+\text{etc.}$$

partant nous avons

$$\frac{dV}{dm} = mC + 4\pi ab - 2\pi abm^2(\delta^2+\varepsilon^2) + \text{etc.}$$

D'un autre côté la formule (6.) donne

$$\frac{dV}{dm} = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\theta \sin\theta(1-2m^2P\sin^2\theta)}{\sqrt{(1-Pm^2\sin^2\theta)}},$$

d'où l'on tire en développant:

$$\frac{dV}{dm} = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, d\theta \sin\theta - 8ab.\tfrac{3}{2}m^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, d\theta P.\sin^3\theta + \text{etc.}$$

Mais on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^3\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} P d\varphi = \frac{\pi}{4}(\delta^2+\varepsilon^2),$$

et par conséquent

$$\frac{dV}{dm} = 4\pi ab - 2\pi abm^2(\delta^2+\varepsilon^2) + \text{etc.}$$

Donc on doit faire $C=0$, ce qui donne

$$11. \quad \frac{dV}{dm} = -4\pi abm\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}}.$$

Il suit de là, que

$$V = -4\pi ab\int m\,dm\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}} = -2\pi ab\int dm^2\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}},$$

ou bien

$$12. \quad V = -2\pi ab\left[m^2\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}} - \int\frac{dm}{\sqrt{Q}}\right].$$

En différentiant l'expression de $\frac{\sqrt{Q}}{m}$ et prenant ensuite l'intégrale, on obtient

$$\frac{\sqrt{Q}}{m} = -\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}} + \delta^2\varepsilon^2\int\frac{m^2dm}{\sqrt{Q}}.$$

Donc l'équation (12.) est équivalente à celle-ci:

$$V = 2\pi ab\left[m\sqrt{Q} + \int\frac{dm}{\sqrt{Q}} - \delta^2\varepsilon^2m^2\int\frac{m^2dm}{\sqrt{Q}}\right].$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire, puisque la fonction V doit devenir nulle en y faisant $m=0$: mais, pour plus de clarté, j'écrirai

$$13. \quad V = 2\pi ab\left[m\sqrt{Q} + \int_0^m\frac{dm}{\sqrt{Q}} - \delta^2\varepsilon^2m^2\int_0^m\frac{m^2dm}{\sqrt{Q}}\right].$$

Maintenant, si l'on fait dans cette formule $m=1$, on aura pour la valeur cherchée de S':

$$14. \quad S' = 2\pi ab\sqrt{((1-\varepsilon^2)(1-\delta^2))} + 2\pi ab\left[\int_0^1\frac{dm}{\sqrt{Q}} - \delta^2\varepsilon^2\int_0^1\frac{m^2dm}{\sqrt{Q}}\right].$$

§. VII.

Les excentricités δ, ε de l'ellipsoïde étant des quantités plus petites que l'unité, on peut faire $\delta m = \sin\psi$: alors on a

$$\int\frac{dm}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\delta}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\sin^2\psi\right)}}.$$

Cette expression aura la forme requise, si $\delta > \varepsilon$: mais si on avait $\delta < \varepsilon$, on ferait $m\varepsilon = \sin\psi$; ce qui donnerait

$$\int\frac{dm}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\sin^2\psi\right)}}.$$

Ainsi, en supposant $\delta > \varepsilon$, si l'on fait

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \sin\tau; \qquad \delta = \sin\omega,$$

la formule (14.) donne

$$15.\quad S' = 2\pi ab\sqrt{((1-\varepsilon^2)(1-\delta^2))} + \frac{2\pi ab}{\delta}\left[\int_0^\omega\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}} - \varepsilon^2\int_0^\omega\frac{\sin^2\psi.d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}}\right];$$

et en supposant $\delta < \varepsilon$, si l'on fait

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \sin\tau, \qquad \varepsilon = \sin\omega,$$

la même formule (14.) donne

$$16.\quad S' = 2\pi ab\sqrt{((1-\varepsilon^2)(1-\delta^2))} + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left[\int_0^\omega\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}} - \delta^2\int_0^\omega\frac{\sin^2\psi d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}}\right].$$

Donc en faisant, conformément à la notation de *Legendre*:

$$\int_0^\omega\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}} = F(\tau,\omega),$$

$$\int_0^\omega d\psi\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin\psi)} = E(\tau,\omega);$$

et se rappelant, que

$$\int_0^\omega\frac{d\psi\sin^2\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\tau.\sin^2\psi)}} = \frac{1}{\sin^2\tau}[F(\tau,\omega)-E(\tau,\omega)];$$

on réduira les formules (15.) et (16.) à cette forme:

$$17.\quad S' = 2\pi ab\sqrt{((1-\varepsilon^2)(1-\delta^2))} + \frac{2\pi ab}{\delta}[(1-\delta^2)F(\tau,\omega)+\delta^2E(\tau,\omega)];$$

$$18.\quad S' = 2\pi ab\sqrt{((1-\varepsilon^2)(1-\delta^2))} + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}[(1-\varepsilon^2)F(\tau,\omega)+\varepsilon^2E(\tau,\omega)].$$

Tel est le résultat trouvé par *Legendre*.

Toutefois on ne doit pas perdre de vue, que la formule (14.) a l'avantage de comprendre les deux cas dans la même expression: ce qui peut être utile dans d'autres recherches.

§. VIII.

S'il était question d'avoir la surface de l'ellipsoïde par une série régulière ordonnée suivant les puissances et les produits de deux excentricités, il vaudrait mieux revenir à la formule (5.) laquelle, en y développant le radical $\sqrt{(1-P\sin^2\theta)}$, et observant, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta = 1; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^3\theta = \tfrac{2}{3}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^5\theta = \frac{2.4}{3.5}; \quad \text{etc.}$$

donne d'abord

$$S' = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[1-\frac{P}{3}-\frac{P^2}{3.5}-\frac{P^3}{5.7}-\frac{P^4}{7.9}-\text{etc.}\right]$$

Or il est facile d'avoir la loi de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi P^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi(\delta^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi)^m$$

à l'aide d'un théorème d'*Euler*. En effet, on a

$$\begin{aligned}\delta^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi &= \tfrac{1}{2}(\delta^2+\varepsilon^2)-\tfrac{1}{2}(\delta^2-\varepsilon^2)\cos 2\varphi \\ &= \tfrac{1}{4}[(\delta+\varepsilon)^2+(\delta-\varepsilon)^2-2(\delta+\varepsilon)(\delta-\varepsilon)\cos 2\varphi],\end{aligned}$$

ou bien

$$\delta^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi = \left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right)^2-2\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta+\varepsilon}\right)\cos 2\varphi\right].$$

Cela posé si l'on fait pour plus de simplicité

$$\alpha = \frac{\delta-\varepsilon}{\delta+\varepsilon}$$

il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi P^m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi[1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\varphi]^m,$$

ou bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi P^m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^{2m}\int_0^{\pi} d\varphi[1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi]^m.$$

Donc en évaluant cette intégrale par la formule donnée par *Euler* dans la page 210 du tome IV. de son Calcul intégral, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi P^m = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^{2m}\left\{\begin{array}{l} 1+m^2.\alpha^2+\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)^2\alpha^4 \\ +\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\right)^2\alpha^6 \\ +\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\right)\alpha^8 \\ +\text{ etc.}\end{array}\right\}.$$

En désignant par $A_{(m)}$ le polynome compris entre les parenthèses on écrira

$$19. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi P^m = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^{2m} A_{(m)}.$$

Cela posé la série précédente donne

$$20. \quad S' = 4\pi ab\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^2 A_{(1)} - \frac{1}{3.5}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^4 A_{(2)} - \text{etc.}\right].$$

§. IX.

Avant de terminer la théorie de la surface entière de l'ellipsoïde, je ferai observer, que, analytiquement parlant, la méthode employée par *Legendre,* consiste à faire

$$x = u\sin\psi; \qquad y = \frac{B}{A}\sqrt{(u^2-A^2)}\cos\psi;$$

où A, B désignent deux quantités constantes; et u, ψ les deux nouvelles variables indépendantes. Ces expressions donnent

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = \sin\psi; \qquad \left(\frac{dy}{du}\right) = \frac{B}{A}\cdot\frac{u}{\sqrt{(u^2-A^2)}}\cos\psi;$$

$$\left(\frac{dx}{d\psi}\right) = u\cos\psi; \qquad \left(\frac{dy}{d\psi}\right) = -\frac{B}{A}\cdot\sqrt{(u^2-A^2)}\sin\psi.$$

Donc la fonction

$$du\,d\psi\left[\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx}{d\psi}\right)-\left(\frac{dy}{d\psi}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\right],$$

qui doit remplacer $dx\,dy$, sera

$$du\,d\psi\left[\frac{B}{A}\cdot\frac{u^2\cos^2\psi}{\sqrt{(u^2-A^2)}}+\frac{B}{A}\sqrt{(u^2-A^2)}\sin^2\psi\right] = \frac{B}{A}\cdot\frac{du\,d\psi\,(u^2-A^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(u^2-A^2)}}.$$

De sorte que la formule (2.) donne

$$S = \frac{B}{A}\iint\frac{du\,d\psi(u^2-A^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(u^2-A^2)}}\sqrt{\left(\frac{1-\frac{\delta^2u^2\sin^2\psi}{a^2}-\frac{B^2.\varepsilon^2}{A^2b^2}(u^2-A^2)\cos^2\psi}{1-\frac{u^2\sin^2\psi}{a^2}-\frac{B^2}{A^2b^2}(u^2-A^2)\cos^2\psi}\right)},$$

ou bien, en remplaçant l'unité par $\sin^2\psi+\cos^2\psi$:

$$S = \frac{B}{A}\iint\frac{du\,d\psi(u^2-A^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(u^2-A^2)}}\sqrt{\left(\frac{\sin^2\psi+\left(1+\frac{\varepsilon^2B^2}{b^2}\right)\cos^2\psi-\frac{u^2\delta^2}{a^2}\left[\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}\cos^2\psi\right]}{\sin^2\psi+\left(1+\frac{B^2}{b^2}\right)\cos^2\psi-\frac{u^2}{a^2}\left[\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}\cos^2\psi\right]}\right)}.$$

Jusqu'ici rien ne détermine les deux constantes A et B. Donc on peut les prendre telles qu'on ait

$$1+\frac{\varepsilon^2B^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}; \qquad 1+\frac{B^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2};$$

ce qui offre l'avantage de pouvoir séparer en deux facteurs, dépendants chacun d'une *seule* variable, la fonction soumise au radical.

Ces deux dernières équations donnent

$$A^2 = \frac{a^2(\delta^2-\varepsilon^2)}{\delta^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}; \qquad B^2 = \frac{b^2(\delta^2-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2(1-\delta^2)} = \frac{b^2(a^2-b^2)}{b^2-c^2},$$

partant l'expression précédente de S devient,

$$S = \frac{B}{A}\iint \frac{du\,d\psi(u^2-A^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(u^2-A^2)}} \sqrt{\left(\frac{\left(\sin^2\psi+\frac{u^2}{b^2}\cos^2\psi\right)\left(1-\frac{u^2\delta^2}{a^2}\right)}{\left(\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}\cos^2\psi\right)\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}\right)},$$

ou bien

$$S = \frac{B}{A}\int\frac{u^2 du.\sqrt{(a^2-\delta^2u^2)}}{\sqrt{(u^2-A^2)(a^2-u^2)}}\int d\psi \sqrt{\left(\frac{\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi}{\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}\cos^2\psi}\right)}$$

$$-AB\int\frac{du\sqrt{(a^2-\delta^2u^2)}}{\sqrt{(u^2-A^2)(a^2-u^2)}}\int d\psi\sin^2\psi \sqrt{\left(\frac{\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi}{\sin^2\psi+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}\cos^2\psi}\right)}.$$

Cette formule, ainsi trouvée *a priori*, s'accorde avec celle que *Legendre* construit par la considération des deux systèmes des lignes de plus grande et de plus petite courbure qui divisent en petits quadrilatères curvilignes la surface de l'ellipsoïde et l'ellipse principale qui en est la projection.

En prenant $u=A$, $u=a$; $\psi=0$, $\psi=\frac{1}{2}\pi$ pour les limites de la double intégration, *Legendre* a tiré de là le résultat donné dans le §. VII.: mais en traversant des difficultés, qui ne sauraient être surmontées sans une profonde connaissance de la théorie des trois transcendantes elliptiques.

§. X.

Imaginons un plan parallèle au plan des xz mené à une distance M de ce dernier. Sur tous les points de l'ellipse résultante de l'intersection de l'ellipsoïde par ce plan, on a

$$M = b\sin\theta\cot\varphi.$$

Comme $M<b$; si l'on fait $M=b\cos\omega$ (sans avoir égard à la signification attribuée précédemment à la lettre ω), on aura

$$\sin\theta = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi}.$$

Donc, conformément à la remarque faite dans le §. III., l'intégrale

$$ab\,d\varphi\int_0^\theta d\theta\sin\theta\sqrt{(1-P\sin^2\theta)},$$

prise de manière que $\sin\theta$ soit remplacé après l'intégration par $\frac{\cos\omega}{\cos\varphi}$

donnera l'aire comprise sur l'ellipsoïde entre deux plans infiniment voisins, menés par l'axe des z et le plan mené à la distance M du plan des x, z. Pour plus de clarté nous ferons

$$21. \quad \sin\theta' = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi},$$

et alors, cette aire élémentaire sera exprimée par

$$ab\,d\varphi \int_0^{\theta'} d\theta \sin\theta \,\gamma(1 - P\sin^2\theta).$$

Donc en intégrant cette aire entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$, on aura

$$A' = r^{h} \int_0^{\omega} d\varphi \int_0^{\theta'} d\theta \sin\theta \,\gamma(1 - P\sin^2\theta)$$

pour l'aire terminée sur l'ellipsoïde par le plan de yz, par le plan mené à la distance M du plan de xz et le plan mené par l'axe des z et le point où le second de ces plans coupe l'ellipse principale dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

De sorte que A' représente l'aire projettée dans le triangle GOH (Taf. III. Fig. 13.). Effectivement, si nous nommons N l'abscisse $OK = GH$, nous avons

$$\operatorname{tang} HOK = \frac{M}{N} = \frac{b\cos\omega}{N}:$$

mais l'équation $\frac{M^2}{b^2} + \frac{N^2}{a^2} = 1$ donne $N = a\sin\omega$; partant, $\operatorname{tang} HOK = \frac{b}{a}\cot\omega$; ce qui s'accorde avec l'équation (4.).

Par un raisonnement tout-à-fait semblable on verra, qu'en posant

$$22. \quad \sin\theta'' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

on a

$$A'' = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\theta''} d\theta \sin\theta \,\gamma(1 - P\sin^2\theta)$$

pour l'aire projettée dans le triangle OHK. Donc en nommant $A = A' + A''$ l'aire projettée dans le rectangle $GHOK$, on aura

$$23. \quad A = ab \int_0^{\omega} d\varphi \int_0^{\theta'} d\theta \sin\theta \sin\theta \,\gamma(1 - P\sin^2\theta)$$

$$+ ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\theta''} d\theta \sin\theta \,\gamma(1 - P\sin^2\theta).$$

Cela posé nous allons chercher l'expression de A par les series.

§. XI.

D'abord nous avons

$$A = ab\int_0^{\omega} d\varphi \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta'} d\theta \sin\theta - \frac{1}{2} P \int_0^{\theta'} d\theta \sin^3\theta - \frac{1.1}{2.4} P^2 \int_0^{\theta'} d\theta \sin^5\theta \\ - \frac{1.1.3}{2.4.6} P^3 \int_0^{\theta'} d\theta \sin^7\theta - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$$+ ab\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta''} d\theta \sin\theta - \frac{1}{2} P \int_0^{\theta''} d\theta \sin^3\theta - \frac{1.1}{2.4} P^2 \int_0^{\theta''} d\theta \sin^5\theta \\ - \frac{1.1.3}{2.4.6} P^3 \int_0^{\theta''} d\theta \sin^7\theta - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Or on a:

$$\int_0^{\theta'} d\theta \sin\theta = 1 - \cos\theta';$$

$$\int_0^{\theta'} d\theta \sin^3\theta = \tfrac{2}{3} - \cos\theta' (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\sin^2\theta') = \tfrac{2}{3} - \cos\theta' f_1(\sin\theta');$$

$$\int_0^{\theta'} d\theta \sin^5\theta = \frac{2.4}{3.5} - \cos\theta' \Big(\frac{2.4}{3.5} + \frac{4}{15}\sin^2\theta' + \frac{1}{5}\sin^4\theta'\Big)$$

$$= \frac{2.4}{3.5} - \cos\theta' f_2(\sin\theta');$$

$$\int_0^{\theta'} d\theta \sin^7\theta = \frac{2.4.6}{3.5.7} - \cos\theta' \Big(\frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{8}{35}\sin^2\theta' + \frac{6}{35}\sin^4\theta' + \frac{1}{7}\sin^6\theta'\Big)$$

$$= \frac{2.4.6}{3.5.7} - \cos\theta' f_3(\sin\theta').$$

Donc en substituant ces valeurs il viendra

$$A = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \Big[1 - \frac{1}{3}P - \frac{1}{3.5}P^2 - \frac{1}{5.7}P^3 - \text{etc.}\Big]$$

$$- ab\int_{\pi}^{\omega} d\varphi \cos\theta' - ab\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\theta''$$

$$+ ab\int_0^{\omega} d\varphi \cos\theta' \Big[\frac{1}{2} P f_1(\sin\theta') + \frac{1.1}{2.4} P^2 f_2(\sin\theta') + \frac{1.1.3}{2.4.6} P^3 f_3(\sin\theta') + \text{etc.}\Big]$$

$$+ ab\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\theta'' \Big[\frac{1}{2} P f_1(\sin\theta'') + \frac{1.1}{2.4} P^2 f_2(\sin\theta'') + \frac{1.1.3}{2.4.6} P^3 f_3(\sin\theta'') + \text{etc.}\Big].$$

D'après la formule (21.) on a

$$\int_0^{\omega} d\varphi \cos\theta' = \int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\omega)}:$$

donc en faisant $\sin\varphi = \sin\omega \cdot \sin\psi$ nous aurons

$$\int_0^{\omega} d\varphi \cos\theta' = \sin^2\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi \cos^2\psi}{1 - \sin^2\psi \sin^2\psi} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\omega).$$

L'équation (22.) donne

$$\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\theta'' = \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\omega)};$$

donc en faisant $\cos\varphi = \cos\omega . \cos\psi'$ on aura

$$\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos\theta'' = \cos^2\omega \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi' \sin^2\psi}{1-\cos^2\omega\cos^2\psi'} = \frac{\pi}{2}(1-\sin\omega).$$

Il suit de là que nous avons

$$\begin{aligned}
A = & \frac{\pi}{2} ab(\sin\omega + \cos\omega - 1) \\
& - ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{1}{3}P + \frac{1}{3.5}P^2 + \frac{1}{5.7}P^3 + \frac{1}{7.9}P'' + \text{etc.}\right) \\
& + ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\cos^2\psi.\sin^2\omega}{1-\sin^2\omega.\sin^2\psi}\left[\frac{1}{2}P'U' + \frac{1.1}{2.4}P'^2U'' + \frac{1.1.3}{2.4.6}P'^3U''' + \text{etc.}\right] \\
& + ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi'\sin^2\psi'.\cos^2\omega}{1-\cos^2\omega.\cos^2\psi'}\left[\frac{1}{2}P''U_1' + \frac{1.1}{2.4}P''^2U_1'' + \frac{1.1.3}{2.4.6}P''^3U_1''' + \text{etc.}\right];
\end{aligned}$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$P' = \delta^2\sin^2\omega\sin^2\psi + \varepsilon^2[1-\sin^2\omega\sin^2\psi] = \varepsilon^2 + (\delta^2-\varepsilon^2)\sin^2\omega\sin^2\psi;$$

$$P'' = \varepsilon^2\cos^2\omega\cos^2\psi' + \delta^2[1-\cos^2\omega\cos^2\psi'] = \delta^2 + (\varepsilon^2-\delta^2)\cos^2\omega\cos^2\psi';$$

$$U' = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2\omega\sin^2\psi};$$

$$U'' = \frac{2.4}{3.5} + \frac{4}{15}\cdot\frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2\omega\sin^2\psi} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\cos^4\omega}{(1-\sin^2\omega\sin^2\psi)^2};$$

$$U''' = \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{8}{15}\cdot\frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2\omega\sin^2\psi} + \frac{6}{35}\cdot\frac{\cos^4\omega}{(1-\sin^2\omega\sin^2\psi)^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{\cos^6\omega}{(1-\sin^2\omega\sin^2\psi)^3},$$

etc.;

$$U_1' = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2\omega}{1-\cos^2\omega\cos^2\psi'};$$

$$U_1'' = \frac{2.4}{3.5} + \frac{4}{15}\cdot\frac{\sin^2\omega}{1-\cos^2\omega\cos^2\psi'} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\sin^4\omega}{(1-\cos^2\omega\cos^2\psi')^2};$$

$$U_1''' = \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{8}{15}\cdot\frac{\sin^2\omega}{1-\cos^2\omega\cos^2\psi'} + \frac{6}{35}\cdot\frac{\sin^4\omega}{1-\cos^2\omega\cos^2\psi')^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{\sin^6\omega}{(1-\cos^2\omega\cos^2\psi')^3};$$

etc.

Pour simplifier cette expression de A, j'observe qu'actuellement, rien n'empeche d'y remplacer ψ et ψ' par φ. Alors, en posant

$$\begin{aligned}
Q' &= \varepsilon^2 + (\delta^2-\varepsilon^2)\sin^2\omega\sin^2\varphi, \\
Q'' &= \delta^2 + (\varepsilon^2-\delta^2)\cos^2\omega\cos^2\varphi, \\
R' &= 1-\sin^2\omega\sin^2\varphi, \\
R'' &= 1-\cos^2\omega\cos^2\varphi,
\end{aligned}$$

il viendra

$$24.\quad A = \frac{\pi}{2}ab(\sin\omega + \cos\omega - 1)$$
$$- ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{1}{3}P + \frac{1}{3.5}P^2 + \frac{1}{5.7}P^3 + \frac{1}{7.9}P^4 + \text{etc.}\right)$$
$$+ ab\sin^2\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\cos^2\omega}{R'}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}Q'\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{\cos^2\omega}{R'}\right]\\ +\frac{1.1}{2.4}Q'^2\left[\frac{2.4}{3.5}+\frac{4}{15}.\frac{\cos^2\omega}{R'}+\frac{1}{5}.\frac{\cos^4\omega}{R'^2}\right]\\ +\frac{1.1.3}{2.4.6}Q'^3\left[\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{8}{15}.\frac{\cos^2\omega}{R'}+\frac{6}{35}.\frac{\cos^4\omega}{R'^2}+\frac{1}{7}.\frac{\cos^6\omega}{R'^3}\right]\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}$$
$$+ ab\cos^2\omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\sin^2\varphi}{R''}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}Q''\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{\sin^2\omega}{R''}\right]\\ +\frac{1.1}{2.4}Q''^2\left[\frac{2.4}{3.5}+\frac{4}{15}.\frac{\sin^2\omega}{R''}+\frac{1}{5}.\frac{\sin^4\omega}{R''^2}\right]\\ +\frac{1.1.3}{2.4.6}Q''^3\left[\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{8}{15}.\frac{\sin^2\omega}{R''}+\frac{6}{35}.\frac{\sin^4\omega}{R''^2}+\frac{1}{7}.\frac{\sin^6\omega}{R''^3}\right]\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

On peut regarder cette formule comme composée de trois suites infinies. Dans le §. VIII. nous avons donné la formule propre à intégrer les différens termes de la première: je vais faire voir qu'on peut aussi intégrer la seconde et la troisième par les formules d'*Euler*.

§. XII.

Pour cela il faut partir de ce principe que, en général, on a:

$$25.\quad 1+K^2\sin^2\theta$$
$$= \frac{K^4}{4[1-\sqrt{(1+K^2)}]^2}\left[1+\left(\frac{1-\sqrt{(1+K^2)}}{K}\right)^4 - 2\left(\frac{1-\sqrt{(1+K^2)}}{K}\right)^2\cos 2\theta\right],$$
$$26.\quad 1-K^2\sin^2\theta$$
$$= \frac{K^4}{4[2-\sqrt{(1-K^2)}]^2}\left[1+\left(\frac{1-\sqrt{(1-K^2)}}{K}\right)^4 - 2\left(\frac{1-\sqrt{(1-K^2)}}{K}\right)^2\cos(\pi-2\theta)\right].$$

Pour démontrer cette transformation j'observe, qu'on a

$$1+a^2-2a\cos 2\theta = 1+a^2-2a(1-2a\sin^2\theta) = (1-a)^2+4a\sin^2\theta;$$

d'où l'on tire

$$1+\frac{4a}{(1-a)^2}\sin^2\theta = \frac{1+a^2-2a\cos 2\theta}{(1-a)^2},$$

Cela posé, si l'on fait $K^2 = \frac{4a}{(1-a)^2}$, on a l'équation

$$a^2 - 2a\left(1 + \frac{2}{K^2}\right) + 1 = 0,$$

qui donne

$$a = 1 + \frac{2}{K^2}(1 - \sqrt{(1+K^2)}) = \left(\frac{1 - \sqrt{(1+K^2)}}{K}\right)^2,$$

et par conséquent les formules (25.) et (26.).

Il suit de là qu'en faisant pour plus de simplicité

$$a' = \tang^2 \tfrac{1}{2}\omega; \qquad a'' = \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right),$$

on a:

$$R' = \cos^4\frac{\omega}{2}\,[1 + a'^2 - 2a'\cos(\pi - 2\Phi)];$$

$$R'' = \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)[1 + a''^2 - 2a''\cos 2\Phi].$$

En posant

$$a''' = \frac{\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2\cos^2\omega + \delta^2\sin^2\omega)}}{(\delta^2 - \varepsilon^2)\sin^2\omega}; \qquad a^{\text{iv}} = \frac{\delta - \sqrt{(\delta^2\sin^2\omega + \varepsilon^2\cos^2\omega)}}{(\varepsilon^2 - \delta^2)\cos^2\omega};$$

on aura

$$Q' = \frac{1}{4a'''^2}[1 + a'''^2 - 2a'''\cos 2\Phi];$$

$$Q'' = \frac{1}{4a^{\text{iv}2}}[1 + a^{\text{iv}2} - 2a^{\text{iv}}\cos(\pi - 2\Phi)].$$

Maintenant si l'on fait

$$\Delta' = 1 + a'^2 - 2a'\cos(\pi - \Phi);$$
$$\Delta'' = 1 + a''^2 - 2a''\cos\Phi;$$
$$\Delta''' = 1 + a'''^2 - 2a'''\cos\Phi;$$
$$\Delta^{\text{iv}} = 1 + a^{\text{iv}2} - 2a^{\text{iv}}\cos(\pi - \Phi);$$

on peut écrire, en doublant les limites de l'intégration,

$$R' = \cos^4\frac{\omega}{2}\Delta'; \qquad R'' = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)\Delta'';$$

$$Q' = \frac{1}{4a'''^2}\Delta'''; \qquad Q''' = \frac{1}{4a^{\text{iv}2}}\Delta^{\text{iv}}.$$

Alors, la formule (24.) devient équivalente à celle-ci:

$$27.\quad A = \frac{\pi}{2} ab(\sin\omega + \cos\omega - 1)$$

$$- ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Phi\left(\frac{1}{3}P + \frac{1}{3.5}P^2 + \frac{1}{5.7}P^3 + \frac{1}{7.9}P^4 + \text{etc.}\right]$$

$$+ \frac{ab.\sin^2\omega}{2\cos^4\frac{\omega}{2}}\int_0^\pi \frac{d\varphi(1+\cos\varphi)}{\Delta}\left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta'''}{2.4\,.\,a'''^2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q}{\Delta'}\right] \\ + \frac{1.1\,.\,\Delta'''^2}{2.4.4^2.a'''^2}\left[\frac{2.4}{3.5} + \frac{4}{15}\cdot\frac{q}{\Delta'} + \frac{1}{5}\cdot\frac{q^2}{\Delta'^2}\right] \\ + \frac{1.1.3\,.\,\Delta'''^3}{2.4.6.4^2.a'''^6}\left[\frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{8}{15}\cdot\frac{q}{\Delta'} + \frac{6}{35}\cdot\frac{q^2}{\Delta'^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{q^3}{\Delta'^3}\right] \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{ab\cos^2\omega}{2\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}\int_0^\pi \frac{d\varphi(1-\cos\varphi)}{\Delta''}\left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta^{\text{IV}}}{2.4\,.\,a^{\text{IV}2}}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q'}{\Delta''}\right] \\ + \frac{1.1\,.\,\Delta^{\text{IV}2}}{2.4.4^2.a^{\text{IV}2}}\left[\frac{2.4}{3.5} + \frac{4}{15}\cdot\frac{q'}{\Delta''} + \frac{1}{5}\cdot\frac{q'^2}{\Delta''^2}\right] \\ + \frac{1.1.3\,.\,\Delta^{\text{IV}3}}{2.4.6.4^2.a^{\text{IV}6}}\left[\frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{8}{15}\cdot\frac{q'}{\Delta''} + \frac{6}{35}\cdot\frac{q'^2}{\Delta''^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{q'^3}{\Delta''^3}\right] \\ + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$q = \frac{\cos^2\omega}{\cos^4\frac{\omega}{2}}; \qquad q' = \frac{\sin^2\omega}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Les fonctions $(\Delta''')^m$, $(\Delta^{\text{IV}})^m$ peuvent être développées par un nombre fini de termes à l'aide de la formule suivante. Soit

$$(1 + a^2 - 2a\cos\Phi)^m = A_0 - 2maA_1\cos\Phi - \frac{2m(1-m)}{2}a^2A_2\cos 2\Phi$$
$$- \frac{2m(1-m)(2-m)}{2.3}a^3A_3\cos 3\Phi - \text{etc.},$$

on aura

$$A_{(\tau)} = (1-a^2)^m\left\{\begin{array}{l} 1 + (m+1)\cdot\frac{m}{\tau+1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2} \\ - \frac{(m+1)(m+2)}{2}\cdot\frac{m(1-m)}{(\tau+1)(\tau+2)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3}\cdot\frac{m(1-m)(2-m)}{(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^3 \\ - \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

(Voyez pages 276 et 278 du tome 2, des Exercices de calcul intégral de *Legendre*.)

Il suit de là, que la seconde et la troisième série de la formule (27.) sont réductibles à des termes de la forme

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1+a^2-2a\cos\varphi)^n},$$

i et n étant des nombres entiers et positifs.

Euler a démontré, qu'on a

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1+a^2-2a\cos\varphi)^n} = \frac{\pi a^i}{(1-a^2)^{2n-1}} \cdot \frac{i+1.i+2.i+3\ldots i+n-1}{1.2.3\ldots n-1} \cdot B_{(n)};$$

$$B_{(n)} = 1 + \frac{n-1}{1} a^2 \frac{n-i-1}{i+1} + \frac{n-1.n-2}{1.2} a^4 \frac{n-i-1.n-i-2}{i+1.i+2}$$
$$+ \frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3} a^6 \frac{n-i-1.n-i-2.n-i-3}{i+1.i+2.i+3}$$
$$+ \text{etc.}$$

Je ne pousse pas plus loin cette analyse: il suffit d'avoir réduit l'intégration à des formules régulières.

Turin le 24. Octobre 1836.

23.

Sur l'intégration des équations $\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + ab\,x^n y = 0$ par des intégrales définies.

(Par *R. Lobatto*, Docteur en sciences à La Haye.)

Les deux équations précédentes ont déjà été traitées dans ce journal; la première par M. *Scherk* (vol. X. pag. 92), et la seconde par Mr. *Kummer* (vol. XII. pag. 144). La méthode d'intégration employée par chacun de ces géomètres, s'appuye sur le développement préalable de la valeur de y en une série infinie qui se transforme ensuite en intégrales définies.

Je me propose ici de faire voir qu'on peut parvenir aux mêmes résultats d'une manière plus directe et plus expéditive sans rechercher d'avance la série infinie qui exprime la valeur de l'intégrale, ni sans établir aucune hypothèse rélativement à la forme de cette série. Le procedé que je vais appliquer pourra sans doute s'étendre avec succès à d'autres équations différentielles du même genre.

I. Intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0$.

Considérons d'abord l'équation plus générale

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = a,$$

a désignant une constante arbitraire, et supposons

$$y = \int e^{px} P\,dp,$$

où P exprime une fonction inconnue de la nouvelle variable p; cette intégrale devant être prise entre deux limites qu'il s'agit de déterminer.

On tire immédiatement de la valeur de y

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int e^{px} P p^n\,dp.$$

Substituant dans la proposée, il viendra

$$\int e^{px} P p^n\,dp - \int e^{px} x P\,dp = a.$$

L'intégration par parties transformera le second terme en

$$e^{px} P - \int e^{px} dP,$$

d'où il suit

$$\int e^{px} (P p^n dp + dP) - e^{px} P = a.$$

Si l'on fait disparaître maintenant la partie affectée du signe intégral, le terme $e^{px} P$ pris entre les deux limites de l'intégrale aura se réduit à la constante $-a$. Or, la première condition fournit immédiatement l'équation différentielle

$$\frac{dP}{P} = -p^n dp,$$

laquelle étant intégrée, donnera

$$P = C e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}},$$

La seconde condition devenant alors

$$C e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} e^{px} = -a,$$

il est facile de voir que cette équation sera satisfaite entre les limites $p = 0$ et $p = \infty$, pourvu que la constante C soit égale à a. On aura par conséquent

$$y = a \int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} . e^{px} dp,$$

Cette valeur de y n'exprimera cependant qu'une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = a,$$

Pour en obtenir une seconde, il suffit de remarquer que puisque la quantité P ne change pas en y écrivant ϱp au lieu de p (ϱ étant une des racines de l'équation $\varrho^{n+1} - 1 = 0$), et qu'il en est de même des deux limites de l'intégrale, cette seconde valeur particulière aura évidemment pour expression

$$\varrho a \int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} . e^{\varrho px} dp.$$

Et comme la différence de ces deux valeurs fournit nécessairement une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0,$$

il en resultera pour cette valeur particulière, l'expression

$$a\int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}}\left[e^{px} - \varrho e^{\varrho px}\right] dp,$$

a désignant une constante quelconque.

Les $n-1$ autres valeurs se formeront évidemment en employant successivement les $n-1$ autres racines $\varrho^2, \varrho^3, \ldots \varrho^n$ de l'équation $\varrho^{n+1} - 1 = 0$. Donc la valeur complète de l'intégrale que nous cherchons, et dont se compose la somme des n valeurs particulières, sera égale à

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} dp\,\{(a + a_1 + a_2 \ldots . a_{n-1})\, e^{px} \\ - (a\varrho e^{\varrho px} + a_1 \varrho^2 e^{\varrho^2 px} + a_2 \varrho^3 e^{\varrho^3 px} \ldots . + a_{n-1} \varrho^n e^{\varrho^n px})\}.$$

Si l'on fait

$$a + a_1 + a_2 \ldots . + a_{n-1} = C$$

et qu'on change a en $-C_1$, a_1 en C_2 etc., l'expression précédente prendra la forme suivante indiquée par Mr. le professeur *Jacobi* (tome X. p. 279):

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} dp\,\{C e^{px} + C_1 \varrho e^{\varrho px} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 px} + \ldots . C_n \varrho^n e^{\varrho^n px}\}.$$

Différentions cette valeur de y, n fois de suite par rapport à x, on trouvera sans peine que le coëfficient-différentiel $\frac{d^n y}{dx^n}$ se réduira, dans l'hypothèse de $n = 0$, à la somme $C + C_1 + C_2 \ldots . + C_n$; d'ou l'on peut conclure que l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = a,$$

s'exprimera par la même valeur de y, pourvu que les $n+1$ constantes soient asujettis à la condition

$$C + C_1 + C_2 + \ldots . C_n = a.$$

II. Intégration de l'équation. $\frac{d^2 y}{dx^2} + ab\,x^n y = 0$.

Faisons d'abord $y = \int e^{-pt} P\,dp$; t et P exprimant des fonctions inconnues de x et de p, qu'il s'agit de déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. Soit encore $ab = -c^2$, l'équation à intégrer deviendra

$$1. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - c^2 x^n y = 0.$$

Différentiant la valeur de y, on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\int e^{-pt} Pp \frac{dt}{dx} dp,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int e^{-pt} Pp^2 \frac{dt^2}{dx^2} dp - \int e^{-pt} Pp \frac{d^2 t}{dx^2} dp.$$

Substituant dans l'équation (1.), il en résultera

$$2. \quad \int e^{-pt} \left(p^2 \frac{dt^2}{dx^2} - c^2 x^2\right) P dp - \int e^{-pt} Pp \frac{d^2 t}{dx^2} dp = 0,$$

Prenons maintenant pour t une fonotion telle qu'on ait

$$\frac{dt^2}{dx^2} = c^2 x^n,$$

ou bien

$$\frac{dt}{dx} = cx^{\frac{n}{2}},$$

d'où l'on déduira facilement, en écrivant m au lieu de $\frac{n}{2} + 1$,

$$t = \frac{c}{m} x^m, \quad \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{t} = \frac{m}{x}, \quad \frac{d^2 t}{dx^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{m(m-1)}{x^2}.$$

Ces valeurs changeront l'équation (2.) en

$$3. \quad m \int e^{-pt} (p^2 - 1) P t^2 dp - (m-1) \int e^{-pt} Ppt\, dp = 0,$$

Or, l'intégration par parties donne pour la valeur du premier terme de cette équation

$$m \left\{ e^{-pt} (1 - p^2) Pt - \int e^{-pt} t\, dP(1-p^2) \right\}.$$

Par consequent

$$m e^{-pt} (1-p^2) Pt - t \int e^{-pt} \left[(m-1) Pp + m\, d\, \frac{P(1-p^2)}{dp} \right] dp = 0.$$

En égalant à zéro la partie soumise au signe intégral, on aura pour déterminer la fonction P, l'équation différentielle

$$(m-1) Pp\, dp + m(1-p^2)\, dP - 2m\, Pp\, dp = 0,$$

qui se réduit à

$$(1-p^2)\, dP = \left(\frac{m+1}{m}\right) Pp\, dp,$$

d'où

$$\frac{dP}{P} = \left(\frac{m+1}{2m}\right) \frac{2p\, dp}{1-p^2}.$$

Donc en intégrant, il viendra

$$P = A(1-p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)}.$$

Quant aux limites de l'intégrale, elles seront données par l'équation

$$e^{-pt} (1-p^2) P = 0,$$

qui revient à

$$4. \quad Ae^{-pt}(1-p^2)^{\frac{m-1}{2m}} = 0.$$

Or, en admettant que l'exposant $\frac{m-1}{2m}$ exprime un nombre positif, ce qui aura lieu lorsque m est >1 ou un nombre négatif quelconque, on voit de suite que l'équation (1.) sera satisfaite par $p = 1$ et $p = \infty$. Donc, pour toutes les valeurs de m non comprises entre 0 et $+1$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de n non comprises entre -2 et 0 l'équation (1.) aura pour intégrale

$$5. \quad y = A\int_1^x e^{-pt}(1-p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp = A\int_1^x e^{-\frac{2cp}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}}(1-p^2)^{-\left(\frac{n+4}{2n+4}\right)} dp.$$

Il n'est pas difficile d'entrevoir, qu'en donnant à l'intégrale la forme

$$y = \int (e^{pt} + e^{-pt}) P dp$$

la fonction P se déterminera par la même équation différentielle que celle obtenue ci-dessus, mais léquation aux limites deviendra alors

$$(e^{pt} - e^{-pt})(1-p^2)P = 0,$$

ou bien

$$A(e^{pt} - e^{-pt})(1-p^2)^{\frac{m-1}{2m}} = 0;$$

équation qui, dans la même hypothèse rélativement au nombre m, donnera pour limites $p = 0$ et $p = 1$. On aura ainsi

$$6. \quad y = A\int_0^1 (e^{pt} + e^{-pt})(1-p^2)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

$$= A\int_0^1 \left(e^{\frac{2cp}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}} + e^{-\frac{2cp}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}}\right)(1-p^2)^{-\left(\frac{n+4}{2n+4}\right)} dp.$$

Chacune des deux expressions (5.) et (6.) représente seulement une intégrale particulière de l'équation (1.). On va voir qu'on peut en trouver encore deux autres qui conviennent respectivement aux deux systèmes de limites de l'intégrale.

A cet effet supposons $y = \int e^{-pt} Px\, dp$, où P et t désignent encore des fonctions de p et de x. Différentiant deux fois de suite et substituant ensuite dans la proposée, on obtiendra sans peine

$$\int e^{-pt}\left[px\frac{d^2t}{dx^2} - p^2 x\frac{dt^2}{dx^2} + 2p\frac{dt}{dx}\right] P dp + c^2\int e^{-pt} x^{n+1} P dp = 0.$$

Si l'on fait de même $\frac{dt}{dx} = cx^{\frac{n}{2}}$, cette dernière équation se reduira à

$$x\int e^{-pt}(1-p^2)\frac{dt^2}{dx^2} P dp + \int e^{-pt}\left(x\frac{d^2t}{dx^2} + 2\frac{dt}{dx}\right) Pp\, dp = 0,$$

et en éliminant les coëfficiens différentiels $\frac{dt}{dx}$, $\frac{d^2t}{dx^2}$, il viendra, après avoir multiplié par x, l'équation

$$m\int e^{pt}(1-p^2)t^2 P dp + (m+1)\int e^{pt} P t p\, dp = 0.$$

Or celle-ci ayant la même forme que celle (3.) traitée ci-dessus, on n'aura qu'à changer dans cette dernière m en $-m$, ce qui nous donnera immédiatement

$$P = A'(1-p^2)^{-\left(\frac{m-1}{2m}\right)}.$$

On aura encore pour l'équation aux limites

$$e^{-pt}(1-p^2)P = 0$$

qui deviendra actuellement

$$A'e^{-pt}(1-p^2)^{\frac{m+1}{2m}} = 0,$$

et à laquelle on pourra satisfaire en prenant $p = 1$ et $p = \infty$, pourvu que l'exposant $\frac{m+1}{2m}$ soit positif, c'est-à-dire que m soit un nombre positif quelconque ou un nombre négatif > 1, ce qui revient à supposer m égal à un nombre non compris entre -1 et 0. On aura ainsi une seconde intégrale particulière

$$7.\quad y = A'x\int_1^\infty e^{-pt}(1-p^2)^{-\left(\frac{m-1}{2m}\right)}dp = A'x\int_1^\infty e^{-\frac{2p}{n+2}x^{\frac{n}{2}}}(1-p^2)^{-\frac{n}{2n+4}}dp,$$

applicable seulement aux valeurs de n non comprises entre -4 et -2. Et si l'on suppose $y = \int(e^{pt} + e^{-pt})P dp$, on trouvera encore en raisonnant comme ci-dessus,

$$8.\quad y = A'x\int_0^1 (e^{pt} + e^{-pt})(1-p^2)^{-\left(\frac{m-1}{2m}\right)}dp$$

$$= A'x\int_0^1\left(e^{\frac{2p}{n+2}x^{\frac{n}{2}}} + e^{-\frac{2p}{n+2}x^{\frac{n}{2}}}\right)(1-p^2)^{-\frac{n}{2n+4}}dp.$$

En prenant la somme des intégrales (5.), (7.), il en résultera la valeur complète de l'intégrale cherchée, qui se rapporte au système de limites $p = 1$ et $p = \infty$. La somme des intégrales (6.), (8.) en fournira une seconde qui se rapporte à l'autre système de limites, chacune de ces intégrales complètes étant applicable à toutes les valeurs de n non comprises entre -4 et 0.

Changeons maintenant c en $ab\sqrt{-1}$, et remplaçons les exponentielles imaginaires par les fonctions circulaires, le seconde des deux sommes précé-

dentes fournira pour intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + abx^n y = 0$$

l'expression

$$9.\quad y = A\int_0^1 (1-p^2)^{-\left(\frac{n+4}{2n+4}\right)}\cos\left(\frac{2p\sqrt{(ab)}}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}\right)dp$$
$$+ A'x\int_0^1 (1-p^2)^{-\frac{n}{2n+4}}\cos\left(\frac{2p\sqrt{(ab)}}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}\right)dp,$$

résultat qui coïncide exactement avec celui obtenu par Mr. *Kummer*. Mais on peut lui donner encore une forme plus simple en faisant $p = \sin\varphi$ et $\sqrt{(ab)} = \alpha m = \alpha\left(\frac{n}{2}+1\right)$. On trouvera alors

$$y = A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^{-\frac{1}{m}} \cos\alpha p x^m\, d\varphi + A'x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^{\frac{1}{m}} \cos\alpha p x^m\, d\varphi$$

pour toutes les valeurs de m non comprises entre -1 et $+1$.

Il ne sera pas inutile d'indiquer ici une autre manière pour parvenir à l'intégrale dont il s'agit.

En effet écrivons l'équation (1.) sous la forme

$$\frac{d^2y}{x^n dx^2} = c^2 y$$

et prenons $du = x^{\frac{n}{2}}dx$ pour différentielle constante. On aura d'abord

$$u = \frac{2}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{m}x^m,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times x^{m-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = (m-1)x^{m-2}\frac{dy}{du} + x^{2(m-1)}\frac{d^2y}{du^2},$$
$$\frac{1}{x^n}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(m-1)}{x^m}\cdot\frac{dy}{du} + \frac{d^2y}{du^2}.$$

Substituant dans la proposée, celle-ci deviendra

$$10.\quad \frac{d^2y}{du^2} + \frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{u}\frac{dy}{du} = c^2 y.$$

Pour intégrer cette équation, prenons $y = \int e^{-pu}P\,dp$, d'où l'on déduira successivement

$$uy = \int e^{-pu}Pu\,dp = -e^{-pu}P + \int e^{-pu}dP,$$
$$\frac{dy}{du} = -\int e^{-pu}Pp\,dp,$$
$$u\frac{d^2y}{du^2} = \int e^{-pu}Pp^2u\,dp = -e^{-pu}Pp^2 + \int e^{-pu}d(Pp^2).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (10.) mise sous la forme

$$u\left(\frac{d^2 y}{du^2} - c^2 y\right) + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{dy}{du} = 0,$$

il viendra

$$e^{-pu} P(c^2 - p^2) + \int e^{-pu}\left[d(Pp^2) - c^2 dP - \left(\frac{m-1}{m}\right) Pp\, dp\right] = 0.$$

En égalant à zéro la partie soumise au signe intégral, on aura pour déterminer P l'équation différentielle

$$(p^2 - c^2)\, dP + \left(\frac{m+1}{m}\right) Pp\, dp = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dP}{P} = -\left(\frac{m+1}{m}\right) \frac{p\, dp}{p^2 - c^2},$$

donc, en intégrant,

$$P = (c^2 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)}.$$

L'équation aux limites deviendra, en ayant égard à la valeur de P,

$$11. \qquad e^{-pu}(c^2 - p^2)^{-\frac{m+1}{2m}} = 0$$

et donnera $p = c$, $p = \infty$ lorsque l'exposant $\frac{m+1}{2m}$ sera positif; il en résultera pour une des valeurs particulières de l'intégrale,

$$y = A\int_c^{\infty} e^{-pu}(c^2 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp = A\int_c^{\infty} e^{-\frac{2p}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}} (c^2 - p^2)^{-\left(\frac{n+4}{2n+4}\right)} dp.$$

En y changeant p en cp, on retrouvera la valeur (5.) obtenue ci-dessus. Remarquons encore que, puisque les limites $p = -c$, $p = +c$ verifient également l'équation (11.), on aura en outre

$$y = A\int_{-c}^{+c} e^{-pu}(c^2 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp = A\int_{-1}^{+1} e^{-cpu}(1 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp,$$

$$y = A\int_{-c}^{+c} e^{pu}\ (c^2 - p^2)^{\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp = A\int_{-1}^{+1} e^{cpu}\ (1 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp,$$

d'où il est aisé de conclure

$$y = A\int_0^1 (e^{cpu} + e^{-cpu})(1 - p^2)^{-\left(\frac{m+1}{2m}\right)} dp;$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'expression (6.).

Pour obtenir une autre valeur particulière, faisons $y = xy'$, la proposée se changera en

$$x\frac{d^2 y'}{dx^2} + 2\frac{dy'}{dx} = c^2 x^{n+1} y'.$$

En effectuant ici le même changement de variable indépendante, on obtiendra

$$\frac{d^2 y'}{du^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{dy'}{du} = c^2 y'.$$

Si l'on compare maintenant cette dernière équation à celle (10.) on en conclura sur le champ que si y' représente une intégrale particulière de la proposée, le produit xy' en fournira une seconde, pourvu qu'on y change m en $-m$, ainsi que cela est confirmé par l'expression (7.).

Je terminerai cette note en faisant observer que les valeurs de y précédemment trouvées pour les intégrales complètes des deux équations

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = c^2 x^n y,$$

conduisent immédiatement aux intégrales complètes des équations différentielles partielles

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x \frac{d^{n+1} y}{dt^{n+1}}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = x^n \frac{d^2 y}{dt^2},$$

où y exprime une fonction des deux variables indépendantes x, t. En effet on trouvera pour la première

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}} dp\,[\varphi(t+px) + \varrho\varphi_1(t+\varrho px) + \cdots \varrho_n\varphi_n(t+\varrho^n px)],$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignant $n+1$ fonctions arbitraires, assujetties seulement à la condition

$$\varphi(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \cdots + \varphi_n(t) = 0,$$

et pour la seconde

$$y = \int_0^\pi \psi(mt + x^m \cos\varphi) \sin\varphi^{-\frac{1}{m}} d\varphi + x\int_0^\pi \psi'(mt + x^m \cos\varphi) \sin\varphi^{\frac{1}{m}} d\varphi,$$

m étant égal à $\frac{n}{2}+1$.

Quant à la manière d'effectuer cette déduction, elle se rattache à une nouvelle théorie d'intégration que j'ai développée dans un mémoire soumis en 1835 à la première classe de l'Institut royal des Pays-bas, et dont l'impression est presque terminée. Les deux équations que nous venons de traiter, ne formant qu'un cas particulier de l'équation plus générale

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Ax^m y,$$

l'intégration de celle-ci, au moyen d'intégrales définies, pourrait être proposée aux géomètres comme un objet de recherches utiles aux progrès de l'analyse.

La Haye, Avril 1837.

24.

De functionibus quibusdam, quae ad radices aequationum circuli sectionum, sive aequationis $x^n - 1 = 0$ pertinent, rationaliter determinandis.

(Auct. *Th. Schönemann* Berol.)

§. 1.

Satis constat, n numerum quemvis integrum significante, aequationem hanc:

$$\sin 2^n x = 2^n \cos 2^{n-1} x \cos 2^{n-2} x \ldots \cos 2x \cos x \sin x$$

valere. x vero $= \frac{\nu\pi}{p}$ posito, sequitur $\sin 2^n x = \pm \sin x$ esse, si $\frac{2^n \nu\pi}{p} = m\pi \pm \frac{\nu\pi}{p}$ sit, (ν, m, p numeros positos significantibus) quam aequationem ita quoque scribere licet $(2^n \pm 1)\nu = mp$ unde fluit, p numero primo posito, quum m sit numerus quispiam arbitrarius, n non pendere a ν, atque secundum ill. *Gaufs* significationem congruentia $2^n \pm 1 \equiv 0$ (mod. p) definiri. Itaque si aequationem $2^n = \pm 1 + mp$ ponimus, sequitur *haec*, $\sin \frac{2^n \nu\pi}{p} = \pm \sin \frac{\nu\pi}{p}$ (ν pari numero posito, in utraque aequatione eadem, ν vero impari, diversa signa sunt substituenda), unde ducimus hanc aequationem

$$\frac{\pm(-1)^\nu}{2^n} = \cos 2^{n-1} \frac{\nu\pi}{p} \cos 2^{n-2} \frac{\nu\pi}{p} \ldots \cos 2 \frac{\nu\pi}{p} \cos \frac{\nu\pi}{p},$$

una cum hac $\pm 1 + mp = 2^n$, ut in utraque aequatione eadem signa substituenda sint

Ex. I. $p = 7$; $1 + 7 = 2^3$;

$$\nu = 1;\ \cos \tfrac{4}{7}\pi \cos \tfrac{2}{7}\pi \cos \tfrac{1}{7}\pi = \frac{-1}{2^3},$$

$$\nu = 2;\ \cos \tfrac{8}{7}\pi \cos \tfrac{4}{7}\pi \cos \tfrac{2}{7}\pi = \frac{+1}{2^3},$$

etc.

II. $\pi = 17$; $-1 + 17 = 2^4$;

$$\nu = 1;\ \cos \tfrac{8}{17}\pi \cos \tfrac{4}{17}\pi \cos \tfrac{2}{17}\pi \cos \tfrac{1}{17}\pi = \frac{1}{2^4},$$

$$\nu = 3;\ \cos \tfrac{24}{17}\pi \cos \tfrac{12}{17}\pi \cos \tfrac{6}{17}\pi \cos \tfrac{3}{17}\pi = \frac{1}{2^4},$$

etc.

$2^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p) secundum theorema Fermatianum, unde

$2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 \equiv 0$ (mod. p) fluit, atque facile probatur, minimum exponentem, qui congruentiae $2^n \pm 1 \equiv 0$ (mod. p) satisfaciat, aut esse ipsum $\frac{p-1}{2}$ aut hujus numeri factorem. Aequatio a cujus solutione valor $\cos\frac{\pi}{p}$ pendet, gradum $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\text{tum}}$ ascendit, et radices: $\cos\frac{\pi}{p}$, $\cos\frac{3\pi}{p}$, $\cos\frac{5\pi}{p}$, ... $\cos\frac{p-2}{p}\pi$ continet, quibuscum factores producti supra evoluti, signi ratione non habita, congruere, facile perspicitur. Si vero $\frac{p-1}{2} = n.m$ est, valor producti $\frac{p-1}{2}$ radicum notus, componitur m productis quorum scilicet valor numericus ex antecedentibus determinandus est, et quorum quodque n radices aequationis tanquam factores concludit. Quum aequatio $\pm\frac{(-1)^\nu}{2^n} = \cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\dots\cos 2\frac{\nu\pi}{p}\cos\frac{\nu\pi}{p}$ semper cum hac $\pm 1 + mp = 2^n$ conjuncta sit, sequitur $\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p} = (-1)^\nu\cos\frac{\nu\pi}{p}$ esse; itaque facillime probari potest, duo quaedam producta

$$\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\dots\cos 2\frac{\nu\pi}{p}\cos\frac{\nu\pi}{p} \text{ et}$$
$$\cos 2^{n-1}\frac{\nu'\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu'\pi}{p}\dots\cos 2\frac{\nu'\pi}{p}\cos\frac{\nu'\pi}{p},$$

aut nullum factorem aut omnes communes inter se habere, prout ν' congruentiae $\nu' \equiv 2^\mu\nu$ (mod. p) (μ numerum quemvis integrum indicante) satisfaciat nec ne.

Sequitur vero ex antecedentibus corollarium quoddam arithmeticum. Quum enim $\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\dots\cos 2\frac{\nu\pi}{p}\cos\frac{\nu\pi}{p}$ tantum a ν pendeat, prout ν par sit aut impar, sequitur quaestionem utrum numerorum $2^{n-1}\nu$, $2^{n-2}\nu$, ... 2ν, numerus par an impar inter limites $(4n-1)p$ et $(4n+1)p$, (n numerum quemvis integrum significante) incidat, tantum a forma $2r$ aut $2r+1$ numeri ν pendere, atque secundum ea, quae modo exposita sint, absolvi posse. Complexum talium factorum, quorum productum $= \frac{\pm(-1)^\nu}{2^n}$ est, periodum appellabimus.

§. 2.

$\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos\frac{2\nu\pi}{p} = \frac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\nu\pi}{p}$ est, quo valore in producto nostro substituto, obtinetur

$$\pm\frac{(-1)^\nu}{2^n} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cos(1+2)\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p},$$
$$\cos(1+2)\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p} + \tfrac{1}{2}\cos(1+2+2^2)\frac{\nu\pi}{p}$$

est, quo valore substituto, aequatio se offert haec:

$$\frac{\pm(-1)^\nu}{2^n} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos(1+2+2^2)\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}.$$

Jam apparet hoc modo semper illud effectum iri ut habeamus aequationem:

$$\frac{\pm(-1)^\nu}{2^n} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\tfrac{1}{8}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^4\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{n-3}}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{2^{n-2}}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{2^{n-2}}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos(1+2+2^2+2^3\cdots+2^{n-2})\frac{\nu\pi}{p}.$$

Quum vero

$$\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos(1+2+2^2+2^3\cdots+2^{n-2})\frac{\nu\pi}{p} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\nu\pi}{p} + \tfrac{1}{2}\cos(2^{n-1})\frac{\nu\pi}{p}$$

sit, ultimi termini in hos transeunt:

$$+\frac{1}{2^{n-3}}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{\nu\pi}{p}+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(2^{n-1})\frac{\nu\pi}{p}.$$

Omnes hi termini praeter ultimum factoribus secundum formam radicum unius periodi compositi sunt, ut vero illum quoque ejusdem periodi esse demonstremus, ponamus

$$1.\qquad 1+mp=2^n,\ \text{et sequitur}\ \cos(2^n-1)\frac{\nu\pi}{p}=(-1)^\nu,$$

$$2.\qquad -1+mp=2^n,\ \text{et sequitur}\ \cos(2^n-1)\frac{\nu\pi}{p}=(-1)^\nu\cos 2\frac{\nu\pi}{p}.$$

Itaque formula illa unius tantum periodi radices continentur.

Ex. I. $p=17$; $\nu=1$;

$$\frac{1}{2^4} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{17}\pi\cos\tfrac{4}{17}\pi\cos\tfrac{8}{17}\pi$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{17}\pi\cos\tfrac{8}{17}\pi$$
$$+\tfrac{1}{8}\cos\tfrac{1}{17}\pi+\tfrac{1}{8}(-1)^1\cos\tfrac{2}{17}\pi;$$

$\nu=2$;

$$\frac{-1}{2^4} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{2}{17}\pi\cos\tfrac{8}{17}\pi\cos\tfrac{16}{17}\pi$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{2}{17}\pi\cos\tfrac{16}{17}\pi$$
$$+\tfrac{1}{8}\cos\tfrac{2}{17}\pi+(-1)^2\cos\tfrac{4}{17}\pi.$$

II. $p=31$; $\nu=1$;

$$\frac{-1}{2^5} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{31}\pi\cos\tfrac{4}{31}\pi\cos\tfrac{8}{31}\pi\cos\tfrac{16}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{31}\pi\cos\tfrac{8}{31}\pi\cos\tfrac{16}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{8}\cos\tfrac{1}{31}\pi\cos\tfrac{16}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{16}\cos\tfrac{1}{31}\pi+(-1)^1\tfrac{1}{16}.$$

$\nu=2$;

$$\frac{1}{2^5} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{2}{31}\pi\cos\tfrac{8}{31}\pi\cos\tfrac{16}{31}\pi\cos\tfrac{32}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{2}{31}\pi\cos\tfrac{16}{31}\pi\cos\tfrac{32}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{8}\cos\tfrac{2}{31}\pi\cos\tfrac{32}{31}\pi$$
$$+\tfrac{1}{16}\cos\tfrac{2}{31}\pi+(-1)^2\tfrac{1}{16}.$$

Similes aequationes pro ceteris periodis $\nu=3$ et $\nu=5$ obtinebimus, quarum si una data fuerit ceterae multiplicatione prodeunt.

Si supra in formula pro $\cos\frac{\nu\pi}{p}$ substituimus $\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}(-1)^\nu$ et per 2 multiplicamus, aequatio prodit haec

$$\begin{aligned}\pm 1 = {} & 2^{n-1}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n+2}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}\\ & + 2^{n-2}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^4\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}\\ & + 2^{n-3}\cos 2^4\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^5\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + 2^3\cos 2^{n-2}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}\\ & + 2^2\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}\\ & + 2^1\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p} + \left[2^1\cos 2\frac{\nu\pi}{p} = 2\cos 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}\right].\end{aligned}$$

Si ultimum terminum in altero aequationis latere collocamus et per $\sin 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p} = 2\sin 2^n\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p} = 2^2\sin 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^{n-1}\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p} = \cdots$ $\cdots = 2^{n-1}\sin 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^3\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}$ dividimus, obtinemus hanc aequationem:

$$\left(\frac{\pm 1 \begin{smallmatrix}-2\\-2\cos 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}\end{smallmatrix}}{\sin 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}}\right) = \frac{1}{\sin 2^2\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^3\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^4\frac{\nu\pi}{p}}\cdots + \frac{1}{\sin 2^n\frac{\nu\pi}{p}}.$$

Quae formula facilius hoc modo derivari potest:

$-\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2x}$ est; $-\frac{\cos 2^2 x}{\sin 2^2 x}$ igitur $= -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x}$ et generaliter $-\frac{\cos 2^{n'} x}{\sin 2^{n'} x} = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^{n'} x}$ est.

$x = 2\frac{\nu\pi}{p}$, $n' = n-1$ posito, evadit formula supra data, quam vero in hancce formam redigimus

1) $1 + mp = 2^n$; $0 = \frac{1}{\sin 2^2\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^3\frac{\nu\pi}{p}}\cdots + \frac{1}{\sin 2^n\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}}$,

2) $-1 + mp = 2^n$;

$$2\,\text{cotang}\frac{\nu\pi}{p} = \frac{1}{\sin 2^2\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^3\frac{\nu\pi}{p}}\cdots + \frac{1}{\sin 2^n\frac{\nu\pi}{p}} + \frac{1}{\sin 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}}.$$

Nota. Haec formula evadit quoque e generaliori;

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n+\omega)}$$

$$=\sin\omega\Big(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega\sin(\alpha_1+\omega)}+\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\omega)\sin(\alpha_1+\alpha_2+\omega)}$$

$$+\frac{\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\omega)\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\omega)}+\cdots$$

$$+\frac{\sin\alpha_n}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}+\omega)\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n+\omega)}\Big),$$

si $\omega=x$; $\alpha_1=x$; $\alpha_2=2x$; $\alpha_3=2^2x$; .... $\alpha_n=2^{n-2}x$ ponimus.

§. 3.

Si in aequatione $\frac{\pm 1}{2^n}=\cos 2\frac{\nu\pi}{p}\cos 2^2\frac{\nu\pi}{p}\cdots\cos 2^n\frac{\nu\pi}{p}$ pro aliquo factore x substituimus, facillime probatur, sequentem $2x^2-1$, primum vero ab ultimo, quia $\cos 2\frac{\nu\pi}{p}=\cos 2^{n+1}\frac{\nu\pi}{p}$ est, eandem esse functionem rationalem. Aequatio pro $\cos 2\frac{\nu\pi}{p}$ radices continet $\frac{\pi-1}{2}$: $\cos 2\frac{\nu\pi}{p}$, $\cos(2\nu+2)\frac{\pi}{p}$, $\cos(2\nu+4)\frac{\pi}{p}$, ... $\cos(2\nu+p-1)\frac{\pi}{p}$, quas in $\frac{p-1}{2n}$ periodos dispertimur. Si vero aequationem pro $\cos 2\frac{\nu\pi}{p}$ in $\frac{p-1}{2n}$ factores resolutam, quorum quisque n factores unius periodi contineat, ponimus, in antecedentibus jam coëfficientem termini $x^0=\pm(-\frac{1}{2})^n$ eruimus, unde alia quoque coëfficientium functio determinari potest. Sint radices $\frac{p-1}{2}$ secundum periodos ordinatae

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_n;\qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_n;\qquad \text{etc.}$$

habemus aequationes

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=\pm\frac{1}{2^n};\qquad \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n=\pm\frac{1}{2^n};\qquad \text{etc.}$$

Unde, his quantitatibus in potestatem secundam elevatis, prodeunt aequationes:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\ldots\alpha_n^2=\frac{1}{2^{2n}};\qquad \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\ldots\beta_n^2=\frac{1}{2^{2n}}.$$

Quum vero $\alpha_m=2\alpha_{m-1}^2-1$ sit, sequitur $\frac{1+\alpha_m}{2}=\alpha_{m-1}^2$, quibus valoribus substitutis, evadunt aequationes:

$$\Big(\frac{1+\alpha_n}{2}\Big)\Big(\frac{1+\alpha_1}{2}\Big)\Big(\frac{1+\alpha_2}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{1+\alpha_{n-1}}{2}\Big)=\frac{1}{2^n},$$

$$\Big(\frac{1+\beta_n}{2}\Big)\Big(\frac{1+\beta_1}{2}\Big)\Big(\frac{1+\beta_2}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{1+\beta_{n-1}}{2}\Big)=\frac{1}{2^n},$$

etc.

Si coëfficientes singulorum $\frac{p-1}{2n}$ factorum per $A_1 A_2 A_3 \ldots . A_n$, $B_1 B_2 B_3 \ldots . B_n$ etc. designamus, ut A_1 sit coëfficiens potestatis x^{n-1}, A_2 potestatis x^{n-2} etc., $A_n = \pm(-\frac{1}{2})^n$, habemus ex illa evolutione aequationes

$$1-A_1+A_2-A \ldots . (-1)^n A_n = \frac{1}{2^n},$$

$$1-B_1+B_2-B_3 \ldots . (-1)^n B_n = \frac{1}{2^n},$$

etc.

Ex. Aequatio pro $\cos\frac{2}{17}\pi$ est

$$x^8+\tfrac{1}{2}x^7-\tfrac{7}{4}x^6-\tfrac{3}{4}x^5+\tfrac{15}{16}x^4+\tfrac{15}{16}x^3-\tfrac{5}{32}x^2-\tfrac{1}{32}x+\tfrac{1}{256} = 0.$$

Ponamus hanc in hos factores resolutam esse

$$(x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x-\tfrac{1}{16})(x^4+B_1x^3+B_2x^2+B_3x-\tfrac{1}{16}),$$

quorum alter radices: $\cos\frac{2}{17}\pi$, $\cos\frac{4}{17}\pi$, $\cos\frac{8}{17}\pi$, $\cos\frac{16}{17}\pi$, alter radices $\cos\frac{6}{17}\pi$, $\cos\frac{12}{17}\pi$, $\cos\frac{24}{17}\pi$, $\cos\frac{48}{17}\pi$, contineat, et prodeunt aequationes

$$1-A_1+A_2-A_3-\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{16},$$

$$1-B_1+B_2-B_3-\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{16},$$

unde facillime colligitur, hos coëfficientes tantum ab aequatione secundi gradus pendere.

§. 4.

Quoniam in producto nostro quivis factor antecedentis eadem est functio rationalis, obtinebimus pro $\cos 2^u \frac{\nu\pi}{\pi}$ (u quemvis numerum integrum significante) aequationem $\cos 2^u \frac{\nu\pi}{p} = x$ posito:

$$\pm\frac{1}{2^u} = x(2x^2-1)(2(x^2-1)^2-1) \text{ etc.},$$

si vero in hoc producto $\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$ pro x substituimus, transit aequatio in hanc

$$\pm\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\alpha^{2^2}+\frac{1}{\alpha^{2^2}}\right)\cdots\left(\alpha^{2^{n-1}}+\frac{1}{\alpha^{2^{n-1}}}\right)$$

unde sequitur

$$\pm 1 = \frac{1}{\alpha^{2^n-1}}(\alpha^2+1)(\alpha^{2^2}+1)(\alpha^{2^3}+1)\ldots.(\alpha^{2^n}+1).$$

Jam habemus

$$\frac{\alpha^{2^2}-1}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^{2^3}-1}{\alpha^{2^2}-1}\cdot\frac{\alpha^{2^4}-1}{\alpha^{2^3}-1}\cdots\frac{\alpha^{2^{n+1}}-1}{\alpha^{2^n}-1} = \frac{\alpha^{2^{n+1}}-1}{\alpha^2-1}$$

$$= (\alpha^2+1)(\alpha^{2^2}+1)(\alpha^{2^3}+1)\ldots.(\alpha^{2^n}+1),$$

qua formula notum theorema de compositione numerorum potestatibus numeri 2. continetur *(L. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, übersetzt von Michelsen, §. 328. Cap. 16.)*. Quo valore in nostra aequatione substituto prodit

$$\pm 1 = \frac{1}{\alpha^{2^n}-1}\left(\frac{\alpha^{2^n+2}-1}{\alpha^2-1}\right) \quad \text{sive} \quad \pm(\alpha^{2^n+1}-\alpha^{2^n-1})-\alpha^{2^n+1}+1 = 0,$$

quam aequationem in hos factores resolvere possumus

$$(\alpha^{2^n+1}\pm 1)(-\alpha^{2^n-1}\pm 1) = 0.$$

Haec sufficiant ad demonstrandum quam facile et directe ad theoremata de relationibus radicum p^{tarum} unitatum, linearumque trigonometricarum q^{tae} peripheriae partis ista via ducamur.

Reductione aequationum circuli in p partes sectionum ad puras, ducimur ad proprietates quasdam radicum unitatis satis memorabiles quae illico ex evolutione:

$$\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{k^2}-1}{\alpha^k-1}\cdot\frac{\alpha^{k^3}-1}{\alpha^{k^2}-1}\cdots\frac{\alpha^{k^n}-1}{\alpha^{k^{n-1}}-1} = \frac{\alpha^{k^n}-1}{\alpha-1}$$
$$= (1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^{k-1})(1+\alpha^k+\alpha^{2k}+\cdots+\alpha^{k(k-1)})\cdots$$
$$\cdots(1+\alpha^{k^{n-1}}+\alpha^{2k^{n-1}}+\cdots\alpha^{k^{n-1}(k-1)})$$

prosiliunt, quando pro α radicem aequationis $x^p-1=0$, et praeterea congruentiam $k^n\equiv\pm 1$ (mod. p) ponimus. Exponenda vero est significatio trigonometrica hujus formulae.

§. 5.

$\cos x+\sin x\sqrt{-1} = \alpha$ posito sequitur $\cos nx = \frac{1}{2}\left(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\right)$; $\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\alpha^n-\frac{1}{\alpha^n}\right)$. Unde producitur n pari n' impari numero posito:

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\alpha^n-\frac{1}{\alpha^n}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}+\cdots+\alpha+\alpha^{-1}+\cdots+\alpha^{3-n}+\alpha^{1-n}),$$
$$\sin n'x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\alpha^{n'}-\frac{1}{\alpha^{n'}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha^{n'-1}+\alpha^{n'-3}+\cdots+1+\cdots+\alpha^{3-n'}+\alpha^{1-n'}).$$

Hinc sequitur

$$\sin nx = \sin x(2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x \cdots + 2\cos x),$$
$$\sin n'x = \sin x(2\cos(n'-1)x + 2\cos(n'-3)x \cdots + 2\cos 2x + 1).$$

Aequo modo obtinemus aequationem

$$\cos n'x = \cos x\left(2\cos(n'-1)x - 2\cos(n'-3)x \cdots + (-1)^{\frac{n'-3}{2}}\cos 2x + (-1)^{\frac{n'-1}{2}}\right).$$

Jam habemus ex his tria aequationum systemata:

$$\sin n^m x = \sin n^{m-1}x(2\cos(n-1)n^{m-1}x + 2\cos(n-3)n^{m-1}x + \cdots + 2\cos n^{m-1}x),$$
$$\sin n^{m-1}x = \sin n^{m-2}x(2\cos(n-1)n^{m-2}x + 2\cos(n-3)n^{m-2}x + \cdots + 2\cos n^{m-2}x)',$$

. . . .

$$\sin nx = \sin x(2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x \cdots + 2\cos x),$$

unde sequitur

$$\begin{aligned}\sin n^m x = \sin x&(2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x + \cdots + 2\cos x)\\ \times&(2\cos(n-1)nx + 2\cos(n-3)nx + \cdots + 2\cos nx)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \times&(2\cos(n-1)n^{m-2}x + 2\cos(n-3)n^{m-2}x + \cdots + 2\cos n^{m-2}x)\\ \times&(2\cos(n-1)n^{m-1}x + 2\cos(n-3)n^{m-1}x + \cdots + 2\cos n^{m-1}x).\end{aligned}$$

Eodem modo obtinemus has formulas

$$\begin{aligned}\cos n'^m x = \cos x&\left(2\cos(n'-1)x - 2\cos(n'-3)x + \cdots (-1)^{\frac{n'-1}{2}}\right)\\ \times&\left(2\cos(n'-1)n'x - 2\cos(n'-3)n'x + \cdots + (-1)^{\frac{n'-1}{2}}\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \times&\left(2\cos(n'-1)n'^{m-2}x - 2\cos(n'-3)n'^{m-2}x + \cdots + (-1)^{\frac{n'-1}{2}}\right)\\ \times&\left(2\cos(n'-1)n'^{m-1}x - 2\cos(n'-3)n'^{m-1}x + \cdots + (-1)^{\frac{n'-1}{2}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin n'^m x = \sin x&(2\cos(n'-1)x + 2\cos(n'-3)x + \cdots + 1)\\ \times&(2\cos(n'-1)n'x + 2\cos(n'-3)n'x + \cdots + 1)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \times&(2\cos(n'-1)n'^{m-2}x + 2\cos(n'-3)n'^{m-2}x + \cdots + 1)\\ \times&(2\cos(n'-1)n'^{m-1}x + 2\cos(n'-3)n'^{m-1}x + \cdots + 1),\end{aligned}$$

$x = \frac{\nu\pi}{p}$; $n = \pm 1 + kp$ posito, sequitur

$$\sin n^m \frac{\nu\pi}{p} = \pm(-1)^k \sin\frac{\nu\pi}{p},$$
$$\cos n^m \frac{\nu\pi}{p} = (-1)^k \cos\frac{\nu\pi}{p}.$$

Unde valorem productorum in dextra aequationum parte per $\sin x$ aut $\cos x$ divisorum $= \pm 1$ obtinemus.

$$\text{Ex.}\quad p = 13;\ n = 3;\ \nu = 1;$$
$$(2\cos\tfrac{2}{13}\pi + 1)(2\cos\tfrac{6}{13}\pi + 1)(+2\cos\tfrac{18}{13}\pi + 1) = 1,$$
$$(2\cos\tfrac{2}{13}\pi - 1)(2\cos\tfrac{6}{13}\pi - 1)\quad(2\cos\tfrac{18}{13}\pi - 1) = 1;$$
$$n = 5;\ \nu = 1;$$
$$(2\cos\tfrac{4}{13}\pi + 2\cos\tfrac{2}{13}\pi + 1)(2\cos\tfrac{20}{13}\pi + 2\cos\tfrac{10}{13}\pi + 1) = 1,$$
$$(2\cos\tfrac{4}{13}\pi - 2\cos\tfrac{2}{13}\pi + 1)(2\cos\tfrac{20}{13}\pi - 2\cos\tfrac{10}{13}\pi + 1) = 1.$$

25.

Additamentum ad commentationem: Series novae, quarum ope integralia elliptica primae et secundae speciei computantur simul ea, quorum moduli sunt conjugati, in huius diarii volumine XVI^{to}.

(Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph.)

In commentatione XXIV^{no} huius diarii (volum. XVI.) integralia

$$U=\int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta.\sin^2\varphi)}} \quad \text{et} \quad U'=\int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\cos^2\theta.\sin^2\varphi)}}.$$

in series redegimus binas

$$\frac{U'+U}{4} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{9}\cdot\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}\operatorname{tang}^9\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{13}\cdot\frac{\overset{6}{\theta}}{6'}\operatorname{tang}^{13}\tfrac{1}{2}\varphi+\cdots\cdot$$

$$\frac{U'-U}{4} = \tfrac{1}{3}\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{7}\cdot\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{11}\cdot\frac{\overset{5}{\theta}}{5'}\cdot\operatorname{tang}^{11}\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$+\tfrac{1}{15}\cdot\frac{\overset{7}{\theta}}{7'}\operatorname{tang}^{15}\tfrac{1}{2}\varphi+\cdots$$

in quibus coëfficientes $\overset{1}{\theta}\,\overset{2}{\theta}\,\overset{3}{\theta}$ etc. pluribus modis independenter ex arcu θ computari possunt adiumento formularum, quas brevitatis causa in epistola hac supprimimus.

Pari modo inveniri series, quibus integralia

$$V=\int_0^{\varphi}\partial\varphi\sqrt{(1-\sin^2\theta.\sin^2\varphi)} \quad \text{et} \quad V'=\int_0^{\varphi}\partial\varphi\sqrt{(1-\cos^2\theta.\sin^2\varphi)},$$

exprimantur, iam in commentatione antea dicta monuimus. Postea vero perspeximus rem notatu dignissimam, *et series has ita parari posse, ut coëfficientes singulorum terminorum sint eadem quantitates* $\overset{1}{\theta}\ \overset{2}{\theta}\ \overset{3}{\theta}\ \overset{4}{\theta}$ *etc. in seriebus antecedentibus occurentes*, quod, cum magis reconditum sit, nunc in lucem proferam. Introducendo quantitatem $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, integralia iterum transformemus in

$$V=\int^t\frac{2\partial t\sqrt{(1+2\cos2\theta.t^2+t^4)}}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad V=\int_0^t\frac{2\partial t\sqrt{(1-2\cos2\theta.t^2+t^4)}}{(1+t^2)^2}.$$

Ponatur $\sqrt{(1+2\cos2\theta.t^2+t^4)} = 1+\frac{\overset{1}{a}}{1'}\cdot t^2+\frac{\overset{2}{a}}{2'}\cdot t^4+\frac{\overset{3}{a}}{3'}\cdot t^6+\frac{\overset{4}{a}}{4'}\cdot t^8+\cdots,$

erit

$$\overset{r}{a} = -(2r-3)\cos 2\theta . \overset{r-1}{a} - (r-3)(r-1) . \overset{r-1}{a},$$

cuius adiamento inveniuntur formulae sequentes:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{a} &= \cos 2\theta, \\
\overset{2}{a} &= \sin^2 2\theta, \\
\overset{3}{a} &= -3\sin^2 2\theta . \cos 2\theta, \\
\overset{4}{a} &= 3\sin^2 2\theta \quad (5\cos^2 2\theta - 1), \\
\overset{5}{a} &= 3\sin^2 2\theta (-35\cos^3 2\theta + \cos 2\theta), \\
\overset{6}{a} &= 3\sin^2 2\theta \ (315\cos^4 2\theta - 84\cos^2 2\theta + 15), \\
&\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Series $1 + \frac{\overset{1}{a}}{1'} \cdot t^2 + \frac{\overset{2}{a}}{2'} \cdot t^4 + \frac{\overset{3}{a}}{3'} \cdot t^6 + \cdots$ factore $\frac{2\partial t}{(1+t^2)^2}$ multiplicata integranda est. Sit integrale

$$\int_0 \frac{t^{2n} . \partial t}{(2n-1)(1+t^2)^2} = T_{(n)}$$

facillime invenies relationem simplicem

$$T_{(n+1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} - T_{(n)},$$

unde deducuntur valores sequentes

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{1.6} \cdot \frac{t^3}{1+t^2} - T_1, \\
T_3 &= \frac{1}{3.5} \cdot \frac{t^5}{1+t^2} - \frac{1}{1.3} \cdot \frac{t^3}{1+t^2} + T_1, \\
T_4 &= \frac{1}{5.7} \cdot \frac{t^7}{1+t^2} - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{t^5}{1+t^2} + \frac{1}{1.3} \cdot \frac{t^3}{1+t^2} - T_1, \\
T_5 &= \frac{1}{7.9} \cdot \frac{t^9}{1+t^2} - \frac{1}{5.7} \cdot \frac{t^7}{1+t^2} + \frac{1}{3.5} \cdot \frac{t^5}{1+t^2} - \frac{1}{1.3} \cdot \frac{t^3}{1+t^2} + T_1, \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

insuper est

$$T_1 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2} + \tfrac{1}{4}\varphi.$$

Si formulis his utimur, obtinemus

$$V = \tfrac{1}{2}\varphi\left(1+\frac{\overset{1}{a}}{1'}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}-7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}+9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}-+\cdots\right)$$
$$+\frac{t}{1+t^2}\left(1-\frac{\overset{1}{a}}{1'}+3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}-5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}+7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}-9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}+-\cdots\right)$$
$$+\frac{2t}{(1+3)(1+t^2)}\left(3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}-5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}+7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}-9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}+-\cdots\right)$$
$$+\frac{2t}{2.5(1+t^2)}\left(5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}-7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}+9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}-11\cdot\frac{\overset{6}{a}}{6'}+-\cdots\right)$$
$$+\frac{2t}{5.7(1+t^2)}\left(7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}-9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}+11\cdot\frac{\overset{6}{a}}{6'}-13\cdot\frac{\overset{7}{a}}{7'}+-\cdots\right)$$
etc.

Differentiando seriem

$$\sqrt{(1+2\cos2\theta.t^2+t^4)} = 1+\frac{\overset{1}{a}}{1'}\cdot t^2+\frac{\overset{2}{a}}{2'}\cdot t^4+\frac{\overset{3}{a}}{3'}\cdot t^6+\cdots,$$

nanciscimur

$$\frac{2(\cos2\theta.t^2+t^3)}{\sqrt{(1+2\cos2\theta.t^2+t^4)}} = 2.\overset{1}{a}.t+2.\frac{\overset{2}{a}}{1'}\cdot t^3+2\cdot\frac{\overset{3}{a}}{2'}t^5+\cdots,$$

quare ponendo $t=\sqrt{-1}$ invenimus serierum summas

$$2\sin\theta = 1-\frac{\overset{1}{a}}{1'}+\frac{\overset{2}{a}}{2'}-\frac{\overset{3}{a}}{3'}+\frac{\overset{4}{a}}{4'}-\frac{\overset{5}{a}}{5'}+-\cdots$$
$$-2\sin\theta = 2\cdot\overset{1}{a}-2\cdot\frac{\overset{2}{a}}{1'}+2\cdot\frac{\overset{3}{a}}{2'}-2\cdot\frac{\overset{4}{a}}{3'}+2\cdot\frac{\overset{5}{a}}{4'}-+\cdots$$

unde patet esse

$$0=2\sin\theta-2\sin\theta=1+\frac{\overset{1}{a}}{1'}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}-7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}+9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'}-+\cdots$$

Si igitur ponimus brevitatis causa

$$1.\quad\begin{cases}\overset{1}{\Delta} = 1+\overset{1}{a},\\ \overset{2}{\Delta} = 1+\overset{1}{a}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'},\\ \overset{3}{\Delta} = 1+\overset{1}{a}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'},\\ \overset{4}{\Delta} = 1+\overset{1}{a}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}-7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'},\\ \overset{5}{\Delta} = 1+\overset{1}{a}-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2'}+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3'}-7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4'}+9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5'},\\ \text{etc.}\qquad\text{etc.}\end{cases}$$

non negligentes, esse $\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$, oritur series simplicior

$$2.\quad V = \sin\varphi\left(1+\frac{\overset{1}{\Delta}}{1.3}\cdot t^2-\frac{\overset{2}{\Delta}}{3.5}\cdot t^4+\frac{\overset{3}{\Delta}}{5.7}\cdot t^6-\frac{\overset{4}{\Delta}}{7.9}\cdot t^8+-\cdots\right),$$

cuius singula membra alio nunc exprimantur modo, ut computo quantitatum $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}$ etc. non amplius opus sit. Quem in finem fingamus functionem evolvendam

$$G = \sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}+\frac{2(\cos 2\theta . t^2-t^4)}{\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}},$$

sive

$$G = \frac{1-t^4}{\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}};$$

quia

$$\sqrt{(1-\cos 2\theta . t^2+t^4)} = 1-\frac{\overset{1}{a}}{1}\cdot t^2+\frac{\overset{2}{a}}{2}\cdot t^4-\frac{\overset{3}{a}}{3}\cdot t^6+-\cdots \text{ et}$$

$$\frac{2(\cos 2\theta . t^2-t^4)}{\sqrt{(1-\cos 2\theta . t^2+t^4)}} = 2\cdot\frac{\overset{1}{a}}{1}\cdot t^2+\frac{\overset{2}{a}}{2}\cdot t^4+6\frac{\overset{3}{a}}{3}\cdot t^6-+\cdots$$

addendo invenimus seriem

$$G=\frac{1-t^4}{\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}=1+\frac{\overset{1}{a}}{1}\cdot t^2-3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2}\cdot t^4+5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3}\cdot t^6-7.\frac{\overset{4}{a}}{4}t^8+-\cdots$$

Quia vero

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}} = 1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1}\cdot t^2+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2}\cdot t^4+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3}\cdot t^6+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4}\cdot t^8+\cdots$$

factore $1-t^4$ multiplicata series est

$$G = 1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1}\cdot t^2+\left(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2}-1\right)t^4+\left(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3}-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1}\right)t^6+\left(\frac{\overset{4}{\Theta}}{4}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2}\right)t^8+\cdots,$$

comparatis cum priore praebet valores simplices

$$\frac{\overset{1}{a}}{1}=\frac{\overset{1}{\Theta}}{1};\quad -3\cdot\frac{\overset{2}{a}}{2}=\frac{\overset{2}{\Theta}}{2}-1;\quad +5\cdot\frac{\overset{3}{a}}{3}=\frac{\overset{3}{\Theta}}{3}-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1};\quad -7\cdot\frac{\overset{4}{a}}{4}=\frac{\overset{4}{\Theta}}{4}-\frac{\overset{2}{\Theta}}{2};$$

$$+9\cdot\frac{\overset{5}{a}}{5}=\frac{\overset{5}{\Theta}}{5}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3};\quad \text{etc.}$$

quibus in formulis (1.) substitutis prodeunt formulae transformatae persimplices

$$\overset{1}{\Delta}=1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1};\quad \overset{2}{\Delta}=\frac{\overset{1}{\Theta}}{1}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2};\quad \overset{3}{\Delta}=\frac{\overset{2}{\Theta}}{2}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3};\quad \overset{4}{\Delta}=\frac{\overset{3}{\Theta}}{3}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4};$$

$$\overset{5}{\Delta}=\frac{\overset{4}{\Theta}}{4}+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5},\quad \text{etc.},$$

quare habemus seriem

$$V = \sin\varphi\Big[1+\Big(1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\Big)\cdot\frac{t^2}{1.3}-\Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\Big)\cdot\frac{t^4}{3.5}+\Big(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\Big)\cdot\frac{t^6}{5.7}$$
$$-\Big(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\Big)\cdot\frac{t^8}{7.9}+-\cdots\Big].$$

Permutando θ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ abit V in V', et functiones $\overset{1}{\Theta}$, $\overset{3}{\Theta}$, $\overset{5}{\Theta}$, $\overset{7}{\Theta}$, etc. nonnisi signa mutant, quare demum addendo et subtrahendo prodeunt series

$$\frac{V+V'}{2} = \sin\varphi\Big(1+\frac{\tan^2\frac{1}{2}\varphi}{1.3}-\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{\tan^4\frac{1}{2}\varphi}{3.5}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{\tan^6\frac{1}{2}\varphi}{5.7}-\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{\tan^8\frac{1}{2}\varphi}{7.9}$$
$$+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{\tan^{10}\frac{1}{2}\varphi}{9.11}-+\cdots\Big),$$

$$\frac{V+V'}{2} = \sin\varphi\Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{\tan^2\frac{1}{2}\varphi}{1.3}-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{\tan^4\frac{1}{2}\varphi}{3.5}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{\tan^6\frac{1}{2}\varphi}{5.7}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{\tan^8\frac{1}{2}\varphi}{7.9}$$
$$+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{\tan^{10}\frac{1}{2}\varphi}{9.11}-+\cdots\Big).$$

Quadrantes bini elliptici, sive integralia definita

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi\sqrt{(1-\sin^2\theta.\sin^2\varphi)} \qquad \text{et} \qquad E'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi\sqrt{(1-\cos^2\theta.\sin^2\varphi)}$$

igitur exprimuntur seriebus

$$\frac{E+E'}{8} = \frac{1}{1.3}-\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{1}{3.5.7}-\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{1}{7.9.11}-\frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{1}{11.13.15}-\frac{\overset{8}{\Theta}}{8'}\cdot\frac{1}{15.17.19}-\cdots$$

$$\frac{E-E'}{8} = \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{1}{1.3.5}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{1}{5.7.9}+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{1}{9.11.13}+\frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{1}{13.15.17}+\frac{\overset{9}{\Theta}}{9'}\cdot\frac{1}{17.19.21}+\cdots$$

26.

Eine Eigenschaft des Kreises.

(Von Hrn. Dr. *E. F. August,* Gymnasialdirector zu Berlin.)

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Kreises. von der ich nicht weifs, ob sie anderswo schon bekannt gemacht ist, fand ich vor Kurzem bei Auflösung einiger geometrischen Probleme und theile sie hier deshalb mit, weil sie durch sehr einfache geometrische Schlüsse abgeleitet werden kann. Diese Ableitung selbst behalte ich einer späteren Mittheilung vor.

Man kann gerade Linien, die von einem Puncte ausgehen, *Strahlen* und einen Inbegriff mehrerer solcher Linien ein Strahlensystem nennen. Liegen alle Linien in derselben Ebene, so kann das Strahlensystem ein *ebenes,* und wenn alle darin vorkommenden Winkel zweier auf einander folgender Strahlen gleich sind, ein regelmäfsiges genannt und durch die Strahlen bestimmt werden. Ist diese Anzahl der Strahlen eine gerade oder ungerade Zahl: so kann dem entsprechend das Strahlensystem ein *geradzahliges* oder *ungeradzahliges* heifsen. und man kann es ein *doppeltungeradzahliges* nennen, wenn die Anzahl der Strahlen durch Verdoppelung einer ungeraden Zahl entsteht.

Dieser Erklärung gemäfs werden die unbestimmt verlängerten grofsen Halbmesser eines regulären Polygons ebene regelmäfsige Strahlensysteme bilden, und namentlich sind die Halbmesser des regulären Zehnecks ein Beispiel eines ebenen, regelmäfsigen doppeltungeradzahligen Strahlensystems.

Nach dieser Vorbemerkung läfst sich der in Rede stehende Satz so angeben.

Wenn man innerhalb eines Kreises einen beliebigen Punct zum Mittelpuncte eines ebenen regelmäfsigen doppelt-ungeradzahligen Strahlensystems wählt und die Strahlen als durch die Peripherie begrenzt ansieht: so ist die Summe des ersten, dritten, fünften etc. d. i. aller ungerade gezählten Strahlen so grofs wie die Summen des zweiten, vierten, sechsten etc. d. i. aller gerade gezählten Strahlen. Dabei ist es gleichgültig, welchen Strahl man als den ersten betrachtet und welche ursprüngliche Richtung derselbe erhalten hat.

Der Satz kann auch so gefafst werden:

Die Summe der Halbirungslinien sämmtlicher Winkel eines ungerad-zahligen ebenen Strahlensystems innerhalb eines Kreises ist so grofs wie die Summe der ursprünglichen Strahlen.

Der Satz bleibt auch im Wesentlichen richtig, wenn der Mittelpunct des Strahlensystems in der Peripherie oder aufserhalb des Kreises angenommen wird: nur mufs im letzteren Falle die Peripherie von der Hälfte der Strahlen getroffen werden. Aufserdem ist der algebraische Gegensatz zu berücksichtigen.

Zieht man z. B. von einem beliebigen Puncte in der Peripherie eines Kreises drei Sehnen, deren mittelste mit jeder äufseren einen Winkel von 60 Graden bildet, so ist, diesem Satze gemäfs, die mittelste Sehne so grofs, wie die beiden äufsersten zusammengenommen.

27.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von Hrn. Dr. *Chr. Gudermann*, Prof. der Mathem. zu Münster.)

Lehrsätze. I. Es stelle $ACBD$ (Fig. 14.) eine sphärische Curve vor, in welcher alle über der Sehne $AB = 2b$ construirte Peripherie-Winkel AMB, AFB etc. gleich grofs sind; jeder sei $= 2c$: dann ist, wenn die Sehne Mm die Sehne AB rechtwinkelig schneidet, Winkel $AMm + MmB = \frac{\pi}{2}$ und $BMm + MmA = \frac{\pi}{2}$, also $AMB + AmB = \pi$. Wird AB von CD rechtwinkelig in E halbirt, so ist CD ein Durchmesser der Curve. Seine Mitte O möge der Mittelpunct der Curve (der Circulare) heifsen. Ist das Dreieck ABF an B rechtwinkelig, und setzen wir $AF = 2h$, $BF = g$, die Applicate $PM = y$, $Pm = y'$, $EP = x$, so ist

$$\sin y - \cos y \sqrt{\frac{\cos 2x - \cos 2h}{\cos 2b - \cos 2h}} = \tang \tfrac{1}{2} g$$

und

$$-\sin y' + \cos y' \sqrt{\frac{\cos 2x - \cos 2h}{\cos 2b + \cos 2h}} = \tang \tfrac{1}{2} g$$

die Gleichung der Curve. Ferner ist $OA = OB = \frac{AF}{2} = h$. Setzt man noch $OE = e$ und $OC = OD = a$, so gelten die einfachen Formeln:

$$\cos e = \frac{\cos h}{\cos b}, \quad \sin a = \frac{\sin h}{\cos b}, \quad \tang h = \frac{\sin a}{\cos e}, \quad \tang^2 b = \sin(a+e)\sin(a-e),$$

$$\tang e = \tang a . \cos 2c, \quad \tang \tfrac{1}{2} g = \frac{\sin e}{\cos a}, \quad \sin e . \cos a = \tang b . \cot 2c.$$

Macht man $Ep = EP = x$ und construirt das rechtwinkelige Dreieck pLP, dessen Hypothenuse $pL = AF = 2.OA$ sei, setzt die Kathete $PL\omega$ und ferner den Winkel $PLp = \varphi$, so ist, in Anwendung der Länge-Function

$$\mathfrak{L} y = \frac{\mathfrak{L}\omega + \mathfrak{L} g}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L} y' = \frac{\mathfrak{L}\omega - \mathfrak{L} g}{2},$$

also

$$\mathfrak{L} g = \mathfrak{L} y - \mathfrak{L} y' \text{ und } \mathfrak{L}\omega = \mathfrak{L} y + \mathfrak{L} y'.$$

Stellt MQ die sphärische Normale der Curve für den Punct M vor, so ist immer Winkel $PMq = \varphi$. Hiernach läfst sich leicht eine Normale und

Tangente durch einen beliebigen Punct ziehen. Die Normalen der Puncte M und m machen mit der Sehne Mm ein gleichschenkeliges Dreieck; dasselbe gilt also von den Berührungslinien. Die Abscissen der äufsersten Puncte H und h, in welchen die Curve von den Applicaten GH und gh berührt wird, sind $EG = Eg = OA = h$.

Wird der Krümmungshalbmesser für den Punct M mit r bezeichnet, so ist $\tan r = \frac{\cos g \tan 2h \cos^3 y}{2 - 3\sin g \sin y + \sin g \sin^3 y}$. Wird die Fläche $ECMP$ mit F bezeichnet, so ist

$$F = \cot 2c . \int \frac{-\tan y(\cot\frac{1}{2}g - \sin y)(\sin y - \tan\frac{1}{2}g).\partial y}{\sqrt{[(\sin y + \cot b\cot c)(\sin y + \tan b\tan c)(\sin y - \tan b\cot c)(\sin y - \cot b\tan c)]}}$$

und für den Bogen CM gilt die Formel

$$s = \frac{1}{\sin 2c}\int \frac{-\cos^2 y.\partial y}{\sqrt{[(\sin y + \cot b\cot c)(\sin y + \tan b\tan c)(\sin y - \tan b\cot c)(\sin y - \cot b\tan c)]}}.$$

Welche sind die Integrale selbst?

In Fig. 15. mag wieder $AB < \frac{1}{2}\pi$ und die Grundsehne der Circulare $ACBD$ sein, U und u seien die beiden sphärischen Mittelpuncte derselben, O ihr Mittelpunct. Man construire zwei sphärische Kegelschnitte; die Halbaxen des einen $GC'gD'$ seien $EG = Eg = OA = h$ und $EC' = ED' = OC = OD = a$; die Halbaxen des andern seien $EG_1 = Eg_1 = \frac{1}{2}\pi - h = \frac{1}{2}\pi - OA$ und $EC_1 = ED_1 = \frac{1}{2}\pi - e = \frac{1}{2}\pi - OE$.

Schneidet nun ein Hauptkreis Uu die Circulare in M und m, den ersten Kegelschnitt in M' und m', den zweiten Kegelschnitt aber in M_1 und m, und ist μ die Hälfte der Sehne Mm der Circulare, so ist immer

$$P\mu = MM' = mm' = UM_1 = um_1.$$

Die Circulare ist eine sphärische Linie *der vierten Ordnung*, und das so eben ausgesprochene Gesetz, welchem gemäfs man mittelst zweier constanter Kegelschnitte zu jeder Abscisse $EP = x$ die Puncte M und m der Circulare oder die Applicaten $PM = y$ und $Pm = y'$ geometrisch finden kann, ist unstreitig die merkwürdigste Eigenschaft dieser sphärischen Curve, deren Analogon in der Planimetrie bekanntlich der Kreis ist.

Welche Eigenschaften hat die reciproke Curve, und welche ist ihre Gleichung?

II. Das einfachste Gesetz der geodätischen Linien scheint bisher übersehen worden zu sein. Ist APB ein sphäroidisches Dreieck, sind

PA und *PB* Meridianbogen, deren Endpuncte *A* und *B* durch die geodätische Linie *AB* verbunden sind: *so verhalten sich die Krümmungen der Linie AB in den Puncten A und B gerade so zu einander, wie die Krümmungen der Meridiane PA und PB in denselben Puncten.*

Ist also l die wahre Breite des nördlichsten (oder auch südlichsten) Punctes der gehörig verlängerten geodätischen Linie, g die reducirte Breite desselben Punctes, λ die Länge eines Gradbogens der geodätischen Linie in einem Puncte A_1 und λ' die Länge des Gradbogens des Meridians, dessen Mitte derselbe Punct A ist, so ist

$$\gamma = \left(\frac{\sin l}{\sin g}\right)^2 \cdot \lambda'.$$

Münster, im Juni 1837.

Druckfehler im vorigen Bande.

Pag. 222 lin. 9 *leg.* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{[x(1-x^2)(1-k^2x^2)]}}$ *loco* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{[(x+x^2)(1-k^2x^2)]}}$

— 223 — 20 *leg.* $z=-z_1$ *loco* $z=-z,$

— 223 — 23 *leg.* $4\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = -\int_1^z \frac{z\,dz}{\Delta z} + \int_{-1}^{z_1} \frac{z\,dz}{\Delta z}$

— 224 — 8 *leg.* $2\sqrt{y} = \sqrt{(a+bx+cx^2)} \mp \sqrt{(a-bx+cx^2)}$
loco $2y = \sqrt{(a+bz+cz^2)} \mp \sqrt{(a-bz+cz^2)}$

— 238 — ult. *leg.* ut per cam *loco* ut

— 239 — 6 *leg.* tractari *loco* tractar

— 245 — 15 *leg.* $\pm 1 \ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)} \ldots\ldots -\sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}$

— 245 — 18 *leg.* $\pm\frac{1}{a} \ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)} \ldots\ldots -\sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}$

— 245 — 21 *leg.* differentiatis *loco* differentialis

— 246 — 14 *leg.* t_1 *loco* $t,$

— 250 — 13 *leg.* $P_1 t^2, -\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}$ *loco* $P_1 t^2 = -\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}$

— 250 — ult.
— 251 — 12 } *leg.* t_1 *loco* t

— 251 — 13 et 16 *leg.* $\frac{1}{a}, \frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_1},$ *loco* $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a},$

— 251 — 18 *leg.* $0, \frac{1}{s_1}, -\frac{1}{s_1},$ *loco* $0, \frac{1}{s}, -\frac{1}{s},$

— 251 — 19
— 252 — 2 } *leg.* $-\frac{1}{a}, \frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_1},$ *loco* $-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a},$

— 253 — 7 *leg.* $P_1 t^2$ *loco* $P_2 t^2$

— 254 — 2 *leg.* fit *loco* sit

— 262 — 4 *leg.* $z[(k^2-\lambda^2\mu^2+\lambda_1^2\mu_1^2)-(k^2-\lambda^2\mu^2)z]$
loco $z(k^2-\lambda^2\mu^2+\lambda_1^2\mu_1^2)-(k^2-\lambda^2\mu^2)z$

— 263 — 18 *leg.* $\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}$ *loco* $\frac{\mu-k\lambda}{\mu+k\lambda}$

— 265 — 3 *leg.* Quaecunque *loco* Quecunque

— 266 — 14 *leg.* $\left(1-\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)$ *loco* $\left(1-\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)$

— 271 — 10 *leg.* 14. $\int$ *loco* 14.

— 276 — 4 *leg.* 1 *loco* 11

— 277 — penult. *leg.* $(1+\lambda\mu z)^2$ *loco* $(1+\lambda\mu z)$

— 278 — 13 et 16 *leg.* $\frac{(1-\lambda\mu z)}{(1+\lambda\mu z)^4}dz$ *loco* $\frac{1-\lambda\mu z}{(1+\lambda\mu z)^4}$

— 279 — 15 *leg.* abeuns *loco* abeunt

Pag. 281 lin. antepenult. *leg.* $2(k-\lambda\mu)$ *loco* $3(k-\lambda\mu)$

— 281 — penult. } — ultima } *leg.* $+\int_{\infty}^{z_2}\frac{(1-\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}\Big)$ *loco* $+\int_{\infty}^{z_2}\frac{(1-\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}$,

— 283 — penult. *leg.* $\frac{(1-c^2y_1)(1-c^2y_2)}{c_1^2}$ *loco* $(1-c^2y_1)(1-c^2y_2)$

— 284 — 2 *leg.* $48 =$ *loco* $48.$

— 286 — 24 *leg.* Q_2, c, L, M. *loco* Q_2, L, M.

— 289 — 3 *in secunda formula leg.* L', M'. *loco* l', m'.

— 290 — 3 *leg.* S *loco* δ

— 291 — 16 *leg.* memorabilis *loco* memorabiles

— 292 — penult. *leg.* $\pm\Big[\int_0^{y_1}$ *loco* $\pm\int_0^{y_1}$

— 297 — 4 *leg.* $\sin\varphi = i\,\mathrm{tang}'\varphi$ *loco* $\sin\varphi = i\,\mathrm{tang}\,\varphi$

— 297 — 12 *leg.* fit *loco* sit

— 298 — antepenult. *leg.* $m_1-c_1l_1$ *loco* (m_1-c_1l)

— 299 — 5 *leg.* $m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1$ *loco* $(m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)$

— — — 6 *leg.* $m_1'^2+c_1'l_1'$ *loco* $m'^2+c_1'l_1'$

— — — 8 *leg.* $2\sqrt{(m_1l_1c_1)}$ *loco* $2\sqrt{(m,\ l,\ c)}$

— — — 9 *leg.* $2\sqrt{(m_1\mathfrak{l}_1\mathfrak{k}_1)}$ *loco* $2\sqrt{(m,\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{k})}$

— — — 10 *leg.* $m_1^2+c_1l_1$ *loco* $m_1^2+c_1l$

— — — 12 *leg.* $(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)$ *loco* $(1+m)(m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)$

— — — — *leg.* $m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1$ *loco* $m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}$

— — — 14 *leg.* $m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1$ *loco* $m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}$

— 300 — 5 *leg.* $\sqrt{(\mathfrak{k}^{0 2}-\mathfrak{l}^{0 2})}\,l_1^0$ *loco* $\sqrt{(\mathfrak{k}^{0 2}-\mathfrak{l}^{0 2})}\,\mathfrak{l}_1^0$

— 301 — 20 *leg.* $\frac{m_1}{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1} > \frac{1}{\mathfrak{k}_1}$ *loco* $\frac{m_1}{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1} > \frac{1}{\mathfrak{k}}$

— 302 — antepenult. *leg.* hic *loco* his

— 304 — 9 *leg.* L_1, L_1' *loco* L, L_1'

— 305 — antepenult. *leg.* $\sqrt{\Big(1-\frac{\mathfrak{l}^{0 2}}{\mathfrak{k}^{0 2}}\Big)}$ *loco* $\sqrt{\Big(1-\frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0}\Big)}$

— 310 — 3 *leg.* $\frac{c^0}{\mathfrak{k}^0} = \Big(\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\Big)\Big(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big)$, *loco*

$$\frac{c^0}{\mathfrak{k}^0} = \Big(\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\Big)\Big(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big) = \frac{m_1^2-c_1^2l_1^2}{m_1^2-C_1^2\mathrm{L}_1^2}\cdot\frac{m+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+cl_1} = \frac{c^2}{C^2}\Big(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1l_1}\Big)^2,$$

— 310 — 4 *leg.* $\frac{m_1'}{\mathrm{M}_1'} = \Big(\frac{c-lm}{c+lm}\Big)\Big(\frac{c+\mathrm{LM}}{c-\mathrm{LM}}\Big)$ *loco*

$$\frac{m_1'}{\mathrm{M}_1'} = \Big(\frac{c-lm}{c+lm}\Big)\Big(\frac{c+\mathrm{LM}}{c-\mathrm{LM}}\Big) = \frac{c^2-l^2m^2}{c^2-\mathrm{L}^2\mathrm{M}^2}\Big(\frac{c+\mathrm{LM}}{c+\mathrm{LM}}\Big)^2 = \Big(\frac{m_1}{\mathrm{M}^1}\Big)^2\Big(\frac{c+\mathrm{LM}}{c+lm}\Big)^2$$

— — — 7 *leg.* $c_1^0 = \frac{2\sqrt{\Big(\frac{c_1l_1}{m_1}\Big)}}{1+\frac{c_1l_1}{m_1}}$, $\mathfrak{k}_1^0 = \frac{2\sqrt{\Big(\frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1}\Big)}}{1+\frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1}}$

— — — 18 *leg.* formulae ducunt: *loco* formulae

Pag. 310 lin. 19 *leg.* $\dfrac{2\sqrt{\left(\frac{ML}{c}\right)}}{1+\frac{ML}{c}}$ *loco* $\dfrac{\frac{2\sqrt{(ML)}}{c}}{1+\frac{ML}{c}}$

— 314 — 10 *leg.* δ^0 *loco* δ^0_1

— 315 — antepenult. *leg.* diminuere *loco* deminnere

— 316 — 4 *leg.* $\left(1+\frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1}\right)$ *loco* $\left(1+\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}{m_1}\right)$

— — — 11 *leg.* $\frac{\mathfrak{l}^2}{4}\left(1+\frac{c^2}{l^2}\right)$ *loco* $\frac{l_1^2}{4}\left(1+\frac{c^2}{l^2}\right)$

— 317 — 11 *leg.* (2.) *loco* (1.)

— 319 — 18 *leg.* $2^2(P''_2-Q''_2)$ *loco* $2^2(P''_2-Q_2)$

— — — 28 *leg.* $[p'_1-p'(1-c')]m''_1$ *loco* $(p'_1-p'(1-c)]m''_1$

— 320 — 6 *leg.* formulae mox cum *loco* formulae cum

— 321 — penult. *leg.* $\frac{nn'n''s''_1}{l''_1 m''_1}$ *loco* $\frac{nn'n''s''}{l''_1 m''_1}$

— 326 — 23 *leg.* $\int_0^{\varphi_1^0}, \int_0^{\varphi_2^0}$ *loco* $\int^{\varphi_1^0}, \int^{\varphi_2^0}$

— — — — *leg.* $(\Pi_2^0\cos^2\varphi+K_2^0\sin^2\varphi)\,d\varphi$ *loco* $\Pi_2^0\cos^2\varphi$

— 329 — 5 *leg.* indices I *loco* indices (I)

— — — antepenult.
— — — ultima } *leg.* F' *loco* F

— 330 — 7 *leg.* transformationis *loco* transformationes

— — — 15 *leg.* $\frac{1-(1-M'_1)\sin^2\varphi'_2}{1-(1+M'_1)\sin^2\varphi'_2}$, *loco* $\frac{1-(1-M'_1\sin^2\varphi'_1}{1-(1+M'_1\sin^2\varphi'_2}$

— 331 — 27 *leg.* $\frac{\varphi_{\prime\prime}^{(n)}}{2}$ *loco* $\frac{\varphi_2^{(n)}}{2}$

— — — 28 *leg.* cum his commutantur *loco* in has abeunt

— 332 — antepenult. *leg.* $P-Q\sin^2\varphi$ *loco* $P_1-Q_1\sin^2\varphi$

— 334 — 12 *leg.* ν^0, ν^{00} *loco* $\nu^0_1\nu^{00}_1$

— 335 — 13, — 14 } *leg.* $\log L$ *et* $\log M$ *loco* $\log B$ *et* $\log A$

— 336 — 15, — 16 } *leg.* $\sin^2\frac{\alpha''}{2}\sin^2\frac{\beta''}{2}$ *et* $\cos^2\frac{\alpha''}{2}\cos^2\frac{\beta''}{2}$

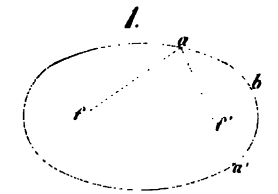
loco $\sin\frac{\alpha''}{2}\sin\frac{\beta''}{2}$ *et* $\cos\frac{\alpha''}{2}\cos\frac{\beta''}{2}$

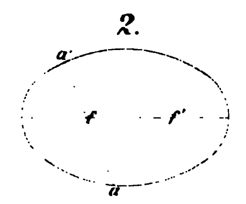
— 336 — antepenult. *leg.* ε''' *loco* c

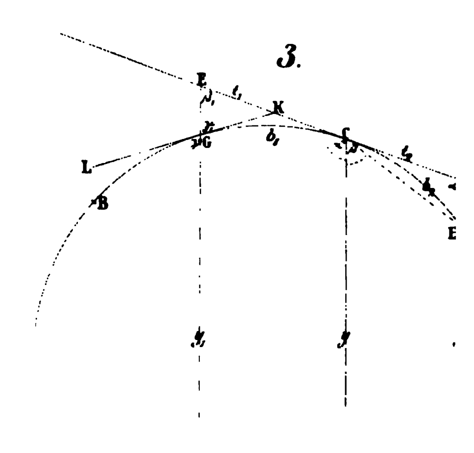
— 337 — 27 *leg.* = *loco* —

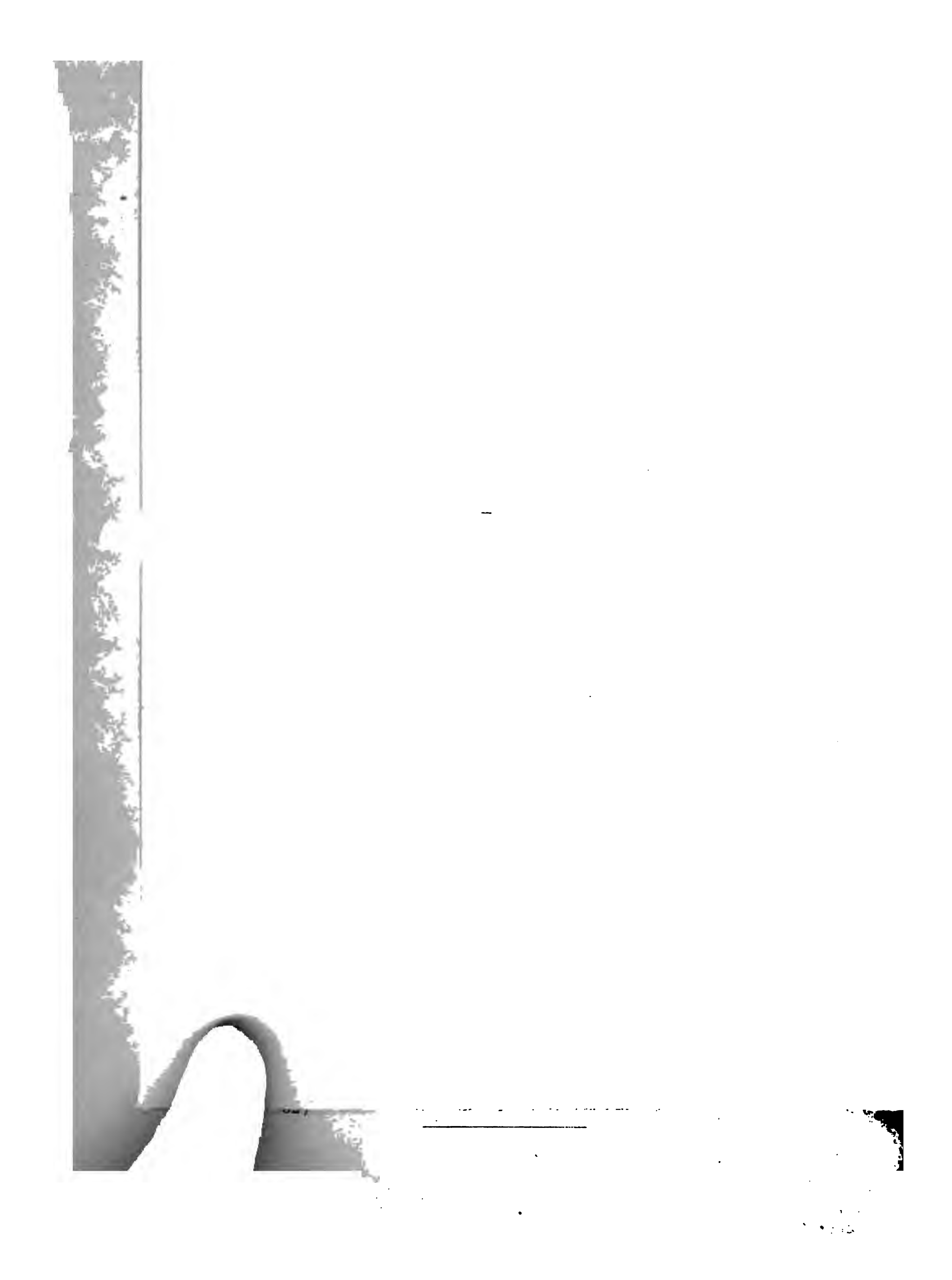
— 338 — 23 *leg.* l^{002} *loco* $\mathfrak{l}^{002}$

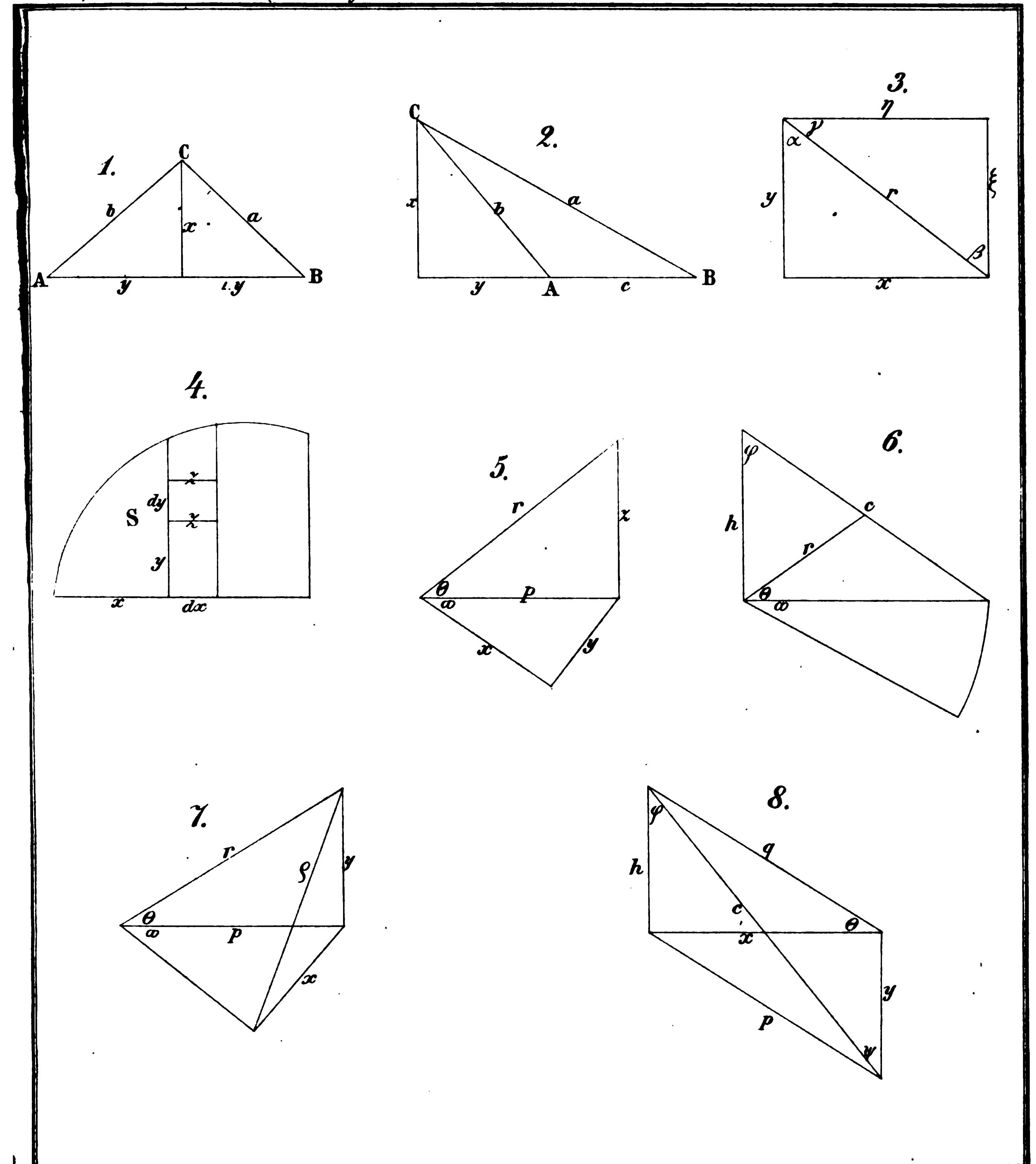
— 340 — 18
— — — 30
— — — 31
— — — 32 } *leg.* 0,0000000, *loco* 0,0,


1.
a
b
f
f'
a'

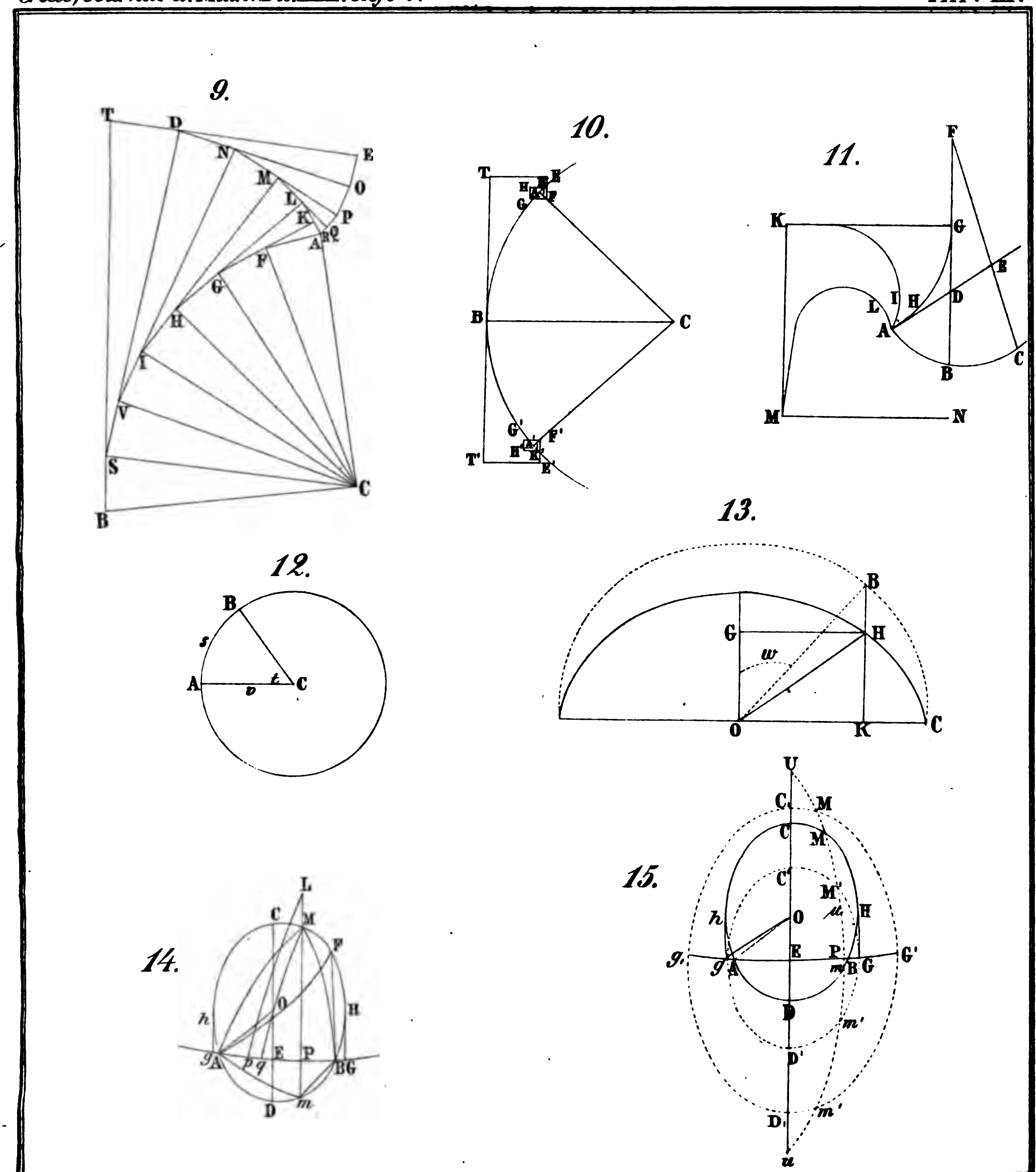

2.
a
f
f'
a


3.
K
L
B
E
g





1.
C
b
a
x
A
y
B
2.
C
x
b
a
y
A
c
B
3.
η
α
ν
y
r
ξ
β
x
4.
S
dy
y
z
z
x
dx
5.
r
z
θ
ω
p
x
y
6.
φ
h
c
r
θ
ω
7.
r
ϱ
y
θ
ω
p
x
8.
φ
h
q
c
θ
x
y
p
ψ


9.
T
D
N
E
M
O
L
K
P
A
B
Q
F
G
H
I
V
S
C
B
10.
T
B
C
T'
11.
F
K
G
E
I
H
D
L
A
C
B
M
N
12.
B
s
A
t
C
v
13.
B
G
H
w
O
K
C
14.
L
C
M
F
h
O
H
g
A
p
q
E
P
B
G
D
m
15.
U
M
C
M
C'
M'
h
O
H
g
A
E
P
B
G
G'
m
D
m'
D'
m'
u

STORAGE

